Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Číselná osa a její chápání u žáků základní školy

The Number Line and its Understanding by Primary School Pupils

Bc. Klára Špačková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2017

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Číselná osa a její chápání u žáků základní školy* vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 21. 4. 2017

....

podpis

Děkuji paní doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, ochotu a čas, který jí věnovala.

Děkuji také mé rodině za podporu jak během psaní práce, tak během celého studia.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá číselnou osou jako prostředkem, který může zlepšit žákovo chápání mnohých matematických pojmů, struktur, vlastností a algoritmů. Cílem práce je zjistit, jak dokáží žáci 2. stupně ZŠ pracovat na číselné ose a získané výsledky vztáhnout k obsahu učebnic. Práce obsahuje teoretickou a praktickou část. Teoretická část uvádí do problematiky číselné osy, věnuje se úlohám používaným pro testování v České republice a uvádí některé výzkumy zaměřené na číselnou osu. Teoretická část práce spolu s analýzou současného stavu využití číselné osy ve vyučování, která je součástí praktické části práce, tvoří podklad pro výzkumné šetření v praktické části. Po pilotním šetření s 19 žáky proběhlo výzkumné šetření v 7 třídách 2. stupně dvou pražských škol. Celkem se výzkumu účastnilo 156 žáků, kterým byl zadán test. Následně byly provedeny rozhovory nad testem s 8 žáky. Výsledky jsou zpracovány v praktické části práce. Ukázalo se, že existuje souvislost mezi obsahem učebnic a chybami žáků při práci na číselné ose a že žáci mají problém znázornit na číselné ose zlomky. Práce je uzavřena doporučeními pro práci učitele s číselnou osou.

KLÍČOVÁ SLOVA

číselná osa, žák 2. stupně, chyba, desetinná čísla, zlomky, celá čísla

ABSTRACT

This diploma thesis deals with the number line as a tool to improve pupil's understanding of various mathematical concepts, structures, properties and algorithms. The aim of the thesis is to determine how are lower secondary pupils able to use the number line and to connect findings with the content of their textbooks. The thesis consists of a theoretical and a practical part. The theoretical part introduces the topic of number line, deals with the problems used for testing in the Czech Republic and presents several researches on this topic. The theoretical part, together with the analysis of current state of the number line usage in teaching, serves as a basis for an experimental investigation that is covered in the practical part. After a pilot testing with 19 pupils, the main testing was conducted in 7 classes of two Prague primary schools. The total of 156 pupils participated in the main testing and 8 of the pupils were later interviewed about their tests. The results are presented in the practical part. It turned out that there is a correspondence between textbook content and pupils' errors while working with number line and that pupils struggle with representing of fractions on the number line. In the conclusion some recommendation for teachers were put forward concerning the usage of the number line in teaching.

KEYWORDS

number line, lower secondary pupil, mistake, decimal numbers, fractions, integers

Obsah

Úvod

V dnešní době je v didaktice matematiky kladen velký důraz na používání modelů ve výuce matematiky, jejichž význam spočívá v lepším zpřístupnění matematických poznatků žákovi. Mnoho prací se zabývá schopností žáků pracovat v jednotlivých číselných oborech a s modely, které se pro tyto obory běžně užívají. Model není cílem výuky, ale prostředkem k porozumění, a díky tomu není snadné zkoumat jeho vliv na žákovy znalosti. Přesto jsem se rozhodla věnovat se přímo jednomu z modelů, a sice číselné ose. Tento model totiž pro své vlastnosti přesahuje jiné modely využívané pouze pro některé číselné obory. Během studia jsem zaznamenala, že jde o téma, které není příliš rozvinuté, ale přesto velmi aktuální. Při hodinách doučování jsem zjistila, že číselná osa je dobrým nástrojem pro zpřístupnění některých oblastí učiva žákovi, který však není běžně používán.

Protože výzkum, který by sledoval účinek využívání číselné osy, by byl nad rámec diplomové práce, zaměřím se v ní na to, jak je zpracována v českých učebnicích a jak s ní žáci dokáží pracovat. Práce sestává z teoretické části, která je východiskem pro praktickou část práce, jejíž součástí je analýza učebnic a vlastní výzkumné šetření na 2. stupni dvou základních škol.

Součástí teoretické části práce jsou dvě kapitoly. První z nich je úvodem do problematiky číselné osy, věnuje se předobrazům číselné osy, jejímu významu především pro výuku, omezením číselné osy a možným problémům žáků při práci s ní, které jsou způsobeny zkušenostmi z běžného života. Ve druhé kapitole popisuji, jaké úlohy s číselnou osou se objevují v testování TIMSS a PISA a jaké úlohy se používají ve státních maturitách. Očekávala jsem totiž, že půjde o úlohy pro žáky neobvyklé, a zamýšlela jsem se jimi inspirovat pro vlastní výzkumné šetření. Do této kapitoly jsou také zařazeny výsledky některých výzkumů týkajících se číselné osy.

Praktická část začíná třetí kapitolou, v níž popisuji, v jaké podobě se objevuje číselná osa v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávávní (RVP ZV) a ve vybraných českých učebnicích. Protože se výzkumné šetření týká 2. stupně základní školy, zaměřuji se na učebnice 5. ročníku a celého 2. stupně. Čtvrtá kapitola je věnována výzkumnému šetření, jehož cílem je zodpovědět tyto otázky: Jakých chyb se žák dopouští při práci na číselné ose? Mají tyto chyby spojitost s obsahem učebnic? Je rozdíl v úspěšnosti řešení úloh mezi školami, který by mohl vyplývat také z užívání odlišných učebnic? Existují rozdíly ve schopnosti žáků pracovat na číselné ose se zlomky a desetinnými čísly? Byly sestaveny testy pro šetření na 2. stupni dvou pražských škol, které byly nejprve pilotně ověřeny. Pro lepší vhled do žákovy práce na číselné ose následně proběhly s několika žáky rozhovory nad řešením testu. Součástí praktické části práce je vyhodnocení jednotlivých úloh se zaměřením na stanovené výzkumné otázky a diskuze společných znaků žákovy práce napříč úlohami.

Na závěr je provedeno shrnutí výzkumného šetření a uvedena doporučení pro učitele, jejichž promítnutí do praxe by mohlo žákům pomoci v lepším porozumění v matematice.

Práce obsahuje tři přílohy: Učebnice pro 5. ročník použité k analýze, Učebnice pro 2. stupeň použité k analýze a Pilotní test.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Číselná osa

Číselná osa je jedním z modelů, které je možné využívat pro prohlubování a upevňování matematických poznatků. Používání modelů je obecně vnímáno jako dobrý nástroj, který dává žákům vhled do mnohých situací, a vytváří tak potenciál pro lepší porozumění. Výuka zaměřená na mechanické počítání pomocí různých návodů či vzorců, jak uvádí Nováková a Vondrová, „může být krátkodobě úspěšná, ovšem pravidla uchopená jen pamětí se nutně začnou žákům plést v okamžiku, kdy jejich počet naroste.“ (2015, s. 8)

Naprostá většina učitelů účastnících se výzkumu zaměřeného na didaktické zvládání kritických míst matematiky vypověděla, že je „důležité, aby žáci chápali podstatu početních algoritmů“ (Rendl, 2015, s. 246). Pochopení čísel i operací s nimi se „zprvu opírá o manipulativní činnosti, kdy dochází prostřednictvím modelů k pochopení algoritmu a následné abstrakci“ (Nováková a Vondrová, 2015, s. 8). Roli jednoho z těchto modelů sehrává právě číselná osa. Rendl (2015) však upozorňuje, že „logika modelu se stává samozřejmou až jeho mnohonásobným používáním jako nástroje při řešení úloh“ (s. 246). Každý žák přirozeně potřebuje jiný čas k tomu, aby se posunul od modelů k práci bez sémantické opory na abstraktní úrovni. Práce s modely, jak uvádí Nováková a Vondrová (2015), umožňuje individualizaci práce; žák řeší úlohy pomocí modelů, jak dlouho potřebuje.

Na význam číselné osy upozorňují i Vamvakoussi a Vosniadou (2012, s. 270) a současně zdůrazňují, že její potenciální síla zůstává žákům, ale i některým učitelům, skryta. Oproti tomu Rendl (2015) se domnívá, že práce s číselnou osou je žákům dobře přístupná. Konkrétně k výuce zlomků uvádí: „Domníváme se, že číselná osa by mohla být oním centrálním modelem, vhodným zároveň i pro operace se zlomky, a tím i pro vysvětlení logiky algoritmů, formulovaných dosud jen jako pravidla.“ (s. 247)

1.1 Předobraz číselné osy

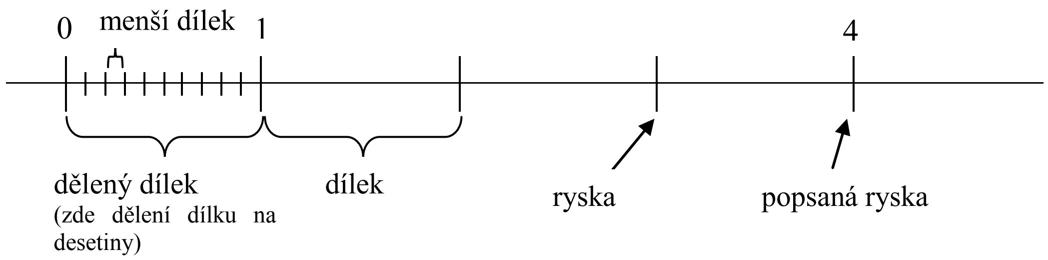
Číselná osa je jakási forma adresování. Rozlišujeme modely cyklického adresování, kde standardním modelem je kružnice (např. ve formě ciferníku či kružnice pro práci se stupni a velikosti úhlů), a lineárního adresování, kde je hlavním modelem číselná osa (Hejný, 2014). V reálném světě se nesetkáváme přímo s číselnou osou, na níž by každý bod odpovídal konkrétnímu číslu a zároveň by byla nekonečná. Jejím předobrazem jsou však mnohé stupnice, které jsou vázány na konkrétní význam v reálném světě a jsou omezené, tzn. mají svůj počátek a konec (Hejný, 2014). V mnoha případech se však dá intuitivně domyslet, jak by daná stupnice mohla pokračovat, kdyby nebyla omezená, což je výhodné pro propedeutiku číselné osy. Dalším rozdílem je jistá rozlišovací schopnost stupnic (tamtéž). Například teploměry mají obvykle rozlišovací schopnost na desetiny stupně, výtah jezdí po celých patrech, běžné pravítko má jako nejmenší dílek milimetry. Za zajímavou lineární stupnici považuje Hejný (2014) kalendář, který je stupnicí času. Tato stupnice je specifická tím, že den na ní neoznačuje bod, ale 24hodinový interval. Každý den lze vyjádřit různými jednoznačnými popisy, tzn. každý den má více adres. Tedy podle Hejného a Stehlíkové (1999) spočívá rozdíl mezi stupnicí a číselnou osou nejméně ve třech vlastnostech:

- stupnice je omezená, číselná osa není
- na rozdíl od číselné osy je stupnice vázána na konkrétní význam v reálném světě
- stupnice má jistou rozlišovací schopnost, kdežto na číselné ose lze pro každé reálné číslo nalézt jemu odpovídající bod

Z právě řečeného vyplývá, že číselná osa není přímo vázána na reálný svět. Pokud jsou však na číselnou osu zaznamenávány hodnoty ze stupnic a jsou-li tyto hodnoty zaznamenány jako veličiny spolu s odpovídajícími jednotkami, přisuzuje se číselné ose spojitost s reálným světem. Ta však nutně neruší další vlastnosti číselné osy. Kdybych takovou číselnou osu nazvala stupnicí, tyto vlastnosti bych omezila. Proto v práci za stupnici označuji to, co se dá nalézt v reálném životě, tedy splňuje tři jmenované vlastnosti. Oproti tomu číselná osa musí splňovat neomezenost a musí na ní být možné zobrazit všechna reálná čísla. Pokud nebude z kontextu zřejmé, zda se jedná o číselnou osu, nebo o stupnici, budu psát „stupnice/ číselná osa“.

Model číselné osy vychází ze zkušenosti žáka se stupnicemi, které jsou různě orientované, proto i číselná osa sama o sobě nemá dánu orientaci. Ta je však tradicí didaktických a učebních materiálů ustálena tak, že u osy, která je (spíše) vodorovná (resp. spíše svislá), jsou vpravo od nuly (resp. nad nulou) čísla kladná a nalevo (resp. pod nulou) čísla záporná. Když Hejný (2014, s. 136) mluví o číselné ose jako o nejpoužívanějším modelu žáků pro porozumění znakům uspořádání, uvádí dvě varianty její orientace: zleva doprava a zdola nahoru. Druhá orientace číselné osy se vyskytuje jen ojediněle. Tam, kde se ve výuce podle jeho učebnic objevuje prostředí Krokování (model Panáček) a prostředí Schody (Tajná chodba), které žáka připravují na porozumění číselné ose, vnímá žák nejdříve číselnou osu ve dvou tvarech, jako vodorovnou a svislou (Hejný, 2004, s. 335). Izomorfizmus mezi nimi žák poznává až později. Žáci, kteří nepoznali tato prostředí či jim podobná, vycházejí ze svých zkušeností s reálnými stupnicemi, bohužel mnoho stupnic, se kterými měli žáci možnost se v běžném životě setkat, dnes přechází do digitální podoby, kde místo stupnice je už jen displej ukazující hodnotu.

Protože názvosloví číselné osy není sjednocené, budu se v práci o jednotlivých částech číselné osy vyjadřovat následovně:



1.2 Význam číselné osy

Přechod od zkušeností se stupnicemi v běžném životě k univerzálnímu modelu číselné osy a její využívání je nezbytné pro rozvoj matematického myšlení žáka (Hejný, 2014). Zvnitřnění aktivit na číselné ose žáka vede k vytvoření tzv. mentální číselné osy, tedy konceptu číselného kontinua (Rendl, 2015, s. 247), který je považován za základ, na němž lze stavět porozumění pokročilejším matematickým konceptům a procedurám (Schneider a kol., 2009, Shindo a Moriya, 2015, Saxe a kol., 2013). Číselná osa je důležitým prostředkem k žákovu porozumění mnohým matematickým konceptům a vztahům a k jejich vzájemnému propojování.

Za nejdůležitější přínos číselné osy považuji univerzálnost jejího použití. Číselná osa je, jak uvádí Nováková a Vondrová (2015), „společným a velmi důležitým modelem pro všechny číselné obory včetně iracionálních čísel, s nimiž se žáci na základní škole začínají seznamovat. […] Pomocí číselné osy lze čísla vizualizovat, prohlubovat pochopení jejich velikosti a uspořádání v číselném kontinuu“. (s. 8) Ostatní modely, které se používají pro znázornění čísel konkrétních číselných oborů, jako jsou koláčové a obdélníkové, popř. tyčové modely (popř. jednotlivé předměty jako diskrétní model) pro kladné zlomky, model peněžního dluhu či teplotní stupnice pro záporná celá čísla, počty diskrétních věcí pro přirozená čísla a různé jiné, které jsou však typické pro výuku v českém prostředí (tamtéž, s. 8), tuto vlastnost univerzálnosti nemají. Číselná osa je modelem pro všechny reprezentanty reálných čísel, tudíž na ní dochází k jejich vzájemnému propojování. Některé definice, vztahy či vlastnosti, jak píše Saxe a kol. (2012, s. 359), jsou z ní snadno odvoditelné a žák se je nemusí učit memorováním.

Konkrétně u výuky zlomků je číselná osa podle Rendla (2015, s. 251), který se opírá o odbornou literaturu, výhodná, protože překonává limity ostatních používaných modelů. Hlavní výhodou je, že na číselné ose není problém s tím, co je jeden celek. Když jsou zobrazeny dva koláče vedle sebe, mohou být chápány jako jeden celek, nebo jako dva celky. Stejně je tomu i u úsečky, která je rozdělena na dvě části, zatímco zobrazení jednoho celku na nekonečné číselné ose je jednoznačné. Také proto není na číselné ose na rozdíl od jiných modelů, jak také uvádí Nováková a Vondrová (2015, s. 24), problém znázornit zlomky větší než jedna. Na rozdíl od jiných modelů je na číselné ose jasnější, co znamená krácení a rozšiřování zlomku a jak se vyjádří celé číslo zlomkem (Saxe a kol., 2012). Na číselné ose lze také znázornit záporný zlomek, který se jiným modelem vyjádřit prakticky nedá. (Pro záporná čísla je číselná osa přirozeným modelem.) Nováková a Vondrová (2015) upozorňují, že zatímco u desetinných čísel je číselná osa používána běžně a automaticky, u zlomků tomu tak není. Konečně pomocí číselné osy „lze vést žáky k porozumění principu zaokrouhlování čísel“ (tamtéž, s. 8). Z číselné osy je navíc vidět, kdy se dvě desetinná čísla rovnají, a dají se na ní znázornit i záporná desetinná čísla. Číselná osa je důležitým a názorným prostředkem pro zavedení náročného pojmu absolutní hodnoty (Hejný, 2014, Saxe a kol., 2012).

Kromě propojování číselných oborů se univerzalita číselné osy ukazuje i na možnosti vhodně znázornit většinu operací. Přestože i číselná osa má v tomto smyslu jisté limity (viz oddíl 1.3), zůstává díky omezenosti ostatních modelů a vzhledem k možnostem propojování číselných oborů nejvíce univerzálním modelem pro zobrazení operací.

K operacím se zlomky na modelech se skepticky vyjadřuje Rendl (2015): „I kdyby však bylo možné reprezentovat číselné operace na stále stejném 2D modelu, domníváme se, že povaha ‚velikosti oblasti‘ zůstává natolik odlišná od povahy číselného kontinua, že to může vytvářet propast mezi znázorněním operací se zlomky a jejich chápáním jako operací s čísly v číselném kontinuu.“ (s. 246) Pouze model číselné osy splňuje kontext číselného kontinua, a protože autor o něco dál konstatuje, že „zdrojem neporozumění zlomkům je také pro děti nejasná logika operací se zlomky jako s čísly a jejich korespondence s názornými či slovními reprezentacemi“ (s. 251), navrhuje používání číselné osy. Uvádí však, že by bylo „potřeba propracovat jak způsoby reprezentace matematických operací, tak techniku práce s číselnou osou“. (s. 251)

Další vlastností číselné osy je, že leží na překrytí aritmetických a geometrických schémat a je vstupní branou do analytické geometrie (Hejný, 2014, s. 167). Geometrické vlastnosti číselné osy jsou názornějším prostředkem (než její numerické vlastnosti) k pochopení faktu, že mezi libovolnými dvěma čísly je nekonečně mnoho čísel (Vamvakoussi a Vosniadou, 2012). K tomuto posunu ve vnímání „mezer“ na číselné ose dochází při přechodu od přirozených čísel, kde každé číslo má svého následovníka, k číslům racionálním a reálným, jichž je číselná osa generickým modelem (Hejný, 2014).

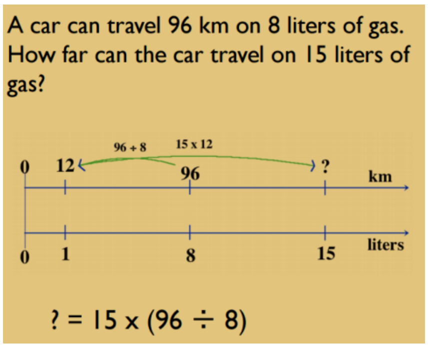
Číselná osa se dá využívat i při výuce dělitelnosti, společného násobku, aritmetického průměru[1] či průměrné rychlosti a pro výuku nerovností a také nerovnic, které však v současné době v RVP ZV (2016) nejsou (podrobněji v oddíle 3.2).

Číselná osa pomáhá v řešení i úloh o čase (podle přednášek M. Hejného, PedF UK, 2017). Ve výuce založené na budování schémat si žáci zvykají používat číselnou osu pro řešení různých úloh. Jako významná propedeutická pomůcka k pojmu číselné osy a dalších nejen z ní vyplývajících matematických poznatků se používá prostředí Krokování a Schody (Hejný, 2014, s. 167). Poté, co žák získá zkušenosti s těmito sémantickými předobrazy číselné osy, je využívána přímo číselná osa.

Pro některé matematické poznatky či úlohy se dá více než jednoduchá číselná osa použít tzv. *double number line (dvojitá číselná osa)*. Jde o model složený ze dvou číselných os, pomocí kterého může žák řešit úlohy založené na přímé úměrnosti. Jsou to dvě rovnoběžné (zpravidla vodorovné) číselné osy, které mají číslo 0 umístěno v bodech nad sebou. Na každou osu se pak

[1] Zmíněno v přednáškách M. Hejného na PedF UK, 2016.

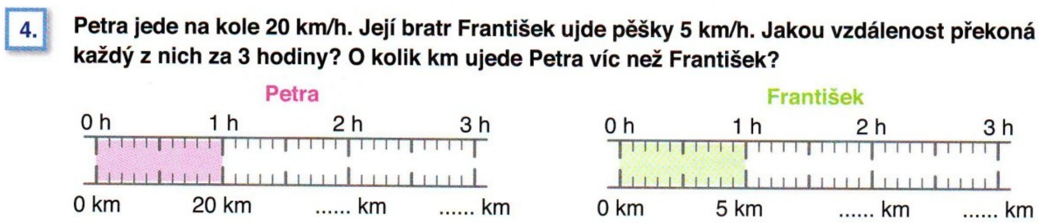
zobrazují počty, hodnoty či množství odlišných kvalit. O dvojité číselné ose píše Watanabe (2012) jako o nástroji vizualizace, který žákovi pomáhá ke správnému řešení zadané úlohy, a uvádí několik příkladů jejího využití (např. obrázek 1).



Obr. 1 Dvojitá číselná osa (Watanabe, 2012, s. 33)

Na internetu lze najít kromě mnoha úloh na přímou úměrnost řešených pomocí dvojité číselné osy také mnoho úloh na převod jednotek[2] (v anglickém jazyce). Dalšími úlohami hojně řešenými pomocí tohoto modelu[3] jsou úlohy na procenta.

V českých didaktických materiálech je výskyt úloh řešených pomocí dvojité číselné osy v současné době spíše ojedinělý. Jedna z nich je v pracovním sešitě *Hravá matematika* (Hrubčová, 2013), kde se v úloze na průměrnou rychlost používají dvě číselné osy pro znázornění přímé úměrnosti (obr. 2): kolikrát víc hodin jedou danou průměrnou rychlostí, tolikrát víc kilometrů ujedou. Pojem číselná osa se tam však nevyskytuje. Úlohu s procenty řešenou na jednoduché číselné ose uvádí Hejný (2004b, s. 54).



Obr. 2 Průměrná rychlost (*Hravá matematika*, pracovní sešit pro 5. ročník, 2. díl, s. 2)

1.3 Omezení číselné osy

První omezení číselné osy je v její propojenosti na geometrické struktury. To zaprvé vyplývá z omezenosti lidského oka, které je schopné rozlišit dva body blízko sebe jen do jejich určité vzdálenosti, za touto hranicí rozlišitelnosti každé dva bližší body splývají oku v jeden. Druhým omezením geometrického charakteru je nemožnost zaznamenat bod přesně, ne pouze symbolicky. Bod nemá žádný obsah, kdežto bod znázorněný sebetenčím nástrojem stále obsah mít bude a zároveň tento znázorněný bod zaujímá i body jeho nejbližšího okolí. Ideálně znázorněný bod však není vidět (přednášky L. Kvasze, PedF UK).

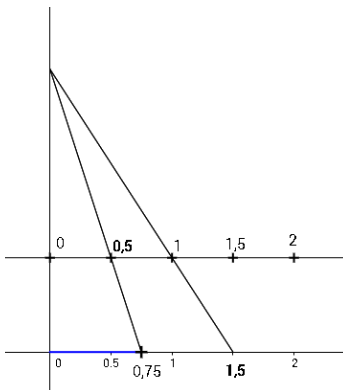
Z výše řečeného plyne nemožnost zaznamenat na zobrazené části číselné osy zároveň čísla velice rozdílných řádů. Například zaznamenat velká čísla 103 498; 103 499 a čísla 1; 8; 9; 56, která jsou oproti nim malá, na jedné nepřerušené části číselné osy. To samé se týká takových čísel (např. −1; 1,00005), pro jejichž přesné, velikostí papíru omezené zobrazení na neomezené

[2] Například zde: http://www.bbc.co.uk/skillswise/worksheet/ma01line-l1-w-using-a-double-number-line je vidět i trochu jiné znázornění principu dvojité číselné osy na jedné číselné ose.
[3] Cox, D. *Double Number Line: Percent of a Number.* Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/KDxuVax6

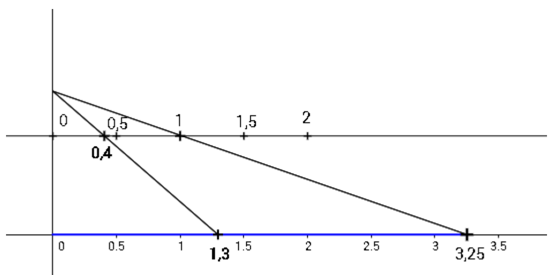
číselné ose je potřeba volit různá měřítka. Tomuto nedostatku se můžeme částečně vyhnout při zaznamenávání čísel na číselnou osu v elektronické podobě (například v programu GeoGebra), kde můžeme vybranou část osy libovolně přiblížit či oddálit. Toto zobrazení více vede k představě nekonečnosti číselné osy, kdežto zobrazení pomocí rýsovacích potřeb nebude nikdy „nekonečné“ a dostatečně přesné.

Nedostatek číselné osy, který je jiné povahy, spočívá v obtížnosti znázornění multiplikativních operací se dvěma desetinnými čísly na jedné číselné ose. Týká se to především násobení dvou desetinných čísel, jejichž součin není přirozeným (celým) číslem, a dělení dvou desetinných čísel takových, kde dělenec není násobkem dělitele, tedy podíl také nevyjde v oboru přirozených (popř. celých) čísel. Znázornit se sice tento podíl dá (obdobně jako ukazuji podíl zlomků v oddíle 3.2), ale nepovedlo se mi to, aniž bych využívala pouze desetinná čísla a ne zlomky, které se (alespoň podle učebnic pro 2. stupeň analyzovaných níže) vyučují později než desetinná čísla.

Jmenované operace se dají znázornit pomocí dvou číselných os, které však využívají poměr, který se dle níže analyzovaných učebnic pro 2. stupeň vyučuje o mnoho později (přibližně o 2 roky) než součin a podíl dvou desetinných čísel. Dvě číselné osy umístěné nad sebou mají na rozdíl od dvojité číselné osy (viz oddíl 1.2) zobrazenou shodně velkou jednotku. Nechala jsem se inspirovat S. Kullaem[4], který takto na dvou číselných osách demonstruje násobení a dělení dvou čísel, a vytvořila jsem znázornění výpočtů $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$ a $1{,}3 : 0{,}4 = 3{,}25$, které se nepodařilo znázornit na jedné číselné ose. Oba obrázky 3a a 3b jsou založeny na podobnosti trojúhelníků.



Obr. 3a Násobení desetinných čísel



Obr. 3b Dělení desetinných čísel

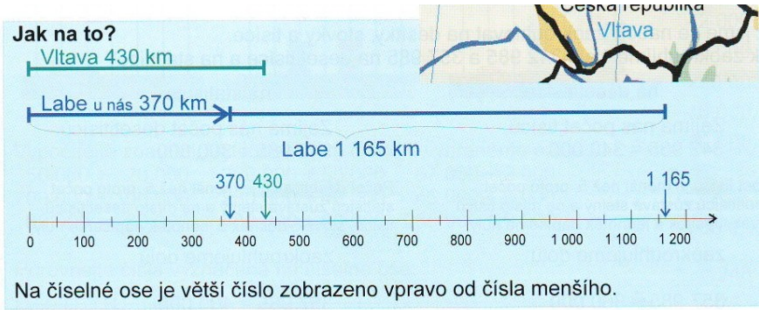
Na rozdíl od písemného násobení není násobení pomocí číselné osy přesné. I když budeme rýsovat přesně, nelze často výsledek z osy kvůli zaokrouhlování či malé rozlišitelnosti dvou libovolně blízkých bodů přečíst přesně. Pro přibližný odhad výsledku je tento nástroj však dostatečný.

1.4 Možné problémy žáků při práci s číselnou osou způsobené zkušenostmi se stupnicemi

Pro budování schopnosti žáka pracovat s číselnou osou (v rovině kvalitativně přínosnější než jen jako s formálním poznatkem) je zkušenost se stupnicemi nezbytná. Na druhé straně Hejný (2014) upozorňuje na problémy, které může tato zkušenost se stupnicemi v běžném životě způsobovat, a to při interpretaci čísla na číselné ose. Z číselné osy totiž nevyčteme informaci, která je v různých reálných situacích z kontextu evidentní. Je to informace, jaký význam číslu dáváme, jak ho vnímáme. Hejný (2014) uvádí, že například na základě zkušenosti se stupnicí teploměru interpretujeme číslo jako bod s danou adresou. Další možnou interpretací čísla je jeho

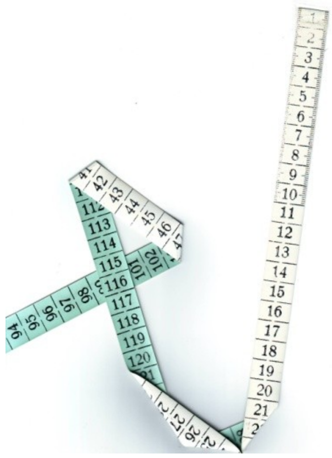
[4] autor obrázků pro násobení čísel $2 \cdot 1{,}5 = 3$ a dělení čísel $3 : 2 = 1{,}5$ na https://en.wikipedia.org/wiki/Number_line

vzdálenost od nuly, což v reálném světě může být například podpořeno zkušeností skoku do dálky. Stejný způsob interpretace čísla na číselné ose jsem nalezla například také v učebnici (viz obr. 4) při opakování porovnávání přirozených čísel. Pokud žák nerozumí oběma interpretacím čísla na číselné ose, dopouští se při práci na ní chyb. Například pokud vnímá číslo pouze jako bod, může rozdíl dvou čísel interpretovat ne jako velikost tří stejných dílků, ale jako dvě rysky mezi danými čísly. Ve druhém případě, kdy žák vnímá číslo pouze jako vzdálenost od nuly, může mít problém například v případě, kdy nula není na číselné ose zobrazena.



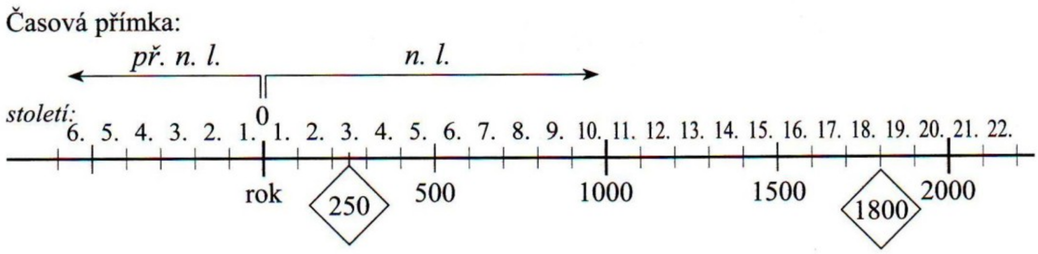
Obr. 4 Porovnávání přirozených čísel (Studio 1+1, 5. roč., 1. díl, s. 5)

Dále Hejný (2014, s. 165–166) uvádí, že pro žáka může být problémem rozdílná zkušenost s označováním pater vícepodlažních domů. Totiž když řekneme, že nás výtah zaveze k bytu ve 4. podlaží domu, odpovídá našemu bytu na číselné ose dílek od bodu 3 do bodu 4, kdežto řeknu-li, že bydlím ve 4. patře, odpovídá tomu na ose dílek od bodu 4 do bodu 5.



Obr. 5 Krejčovský metr

Další problém v orientaci na číselné ose a těžkosti v porozumění systému obrazů čísel na ose může plynout z žákových zkušeností s pravolevou orientací některých stupnic či se svislou stupnicí, na které jsou nižší čísla umístěna výše než vyšší, jak je vidět například na obrázku 5. Část číselné osy, která kopíruje systém čísel na obrázku krejčovského metru, se nachází v pracovním sešitě k učebnici Matematika se čtyřlístkem (obr. 18) či v učebnici M. Hejného a kol. (obr. 39). Stupnice, která je na obrázku 6, nemá nalevo záporná čísla a napravo kladná, ale kladná na obě strany od nuly, protože století před naším letopočtem a našeho letopočtu jsou odlišena příslušnými zkratkami.



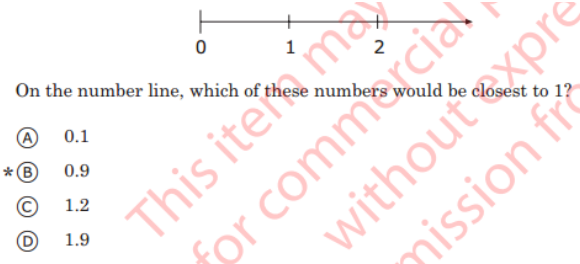
Obr. 6 Časová přímka (Nová škola, 5. ročník, pracovní sešit, 1. díl, s. 34)

2 Číselná osa v testování a výzkumech

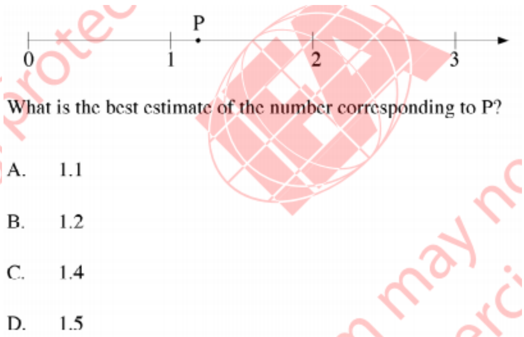
2.1 Úlohy s číselnou osou v testování TIMSS a PISA

Úlohy mezinárodního výzkumu TIMSS svým charakterem odpovídají úlohám školního prostředí a tématům, která se vyučují. Většina úloh je zadána jako uzavřená, s nabídkou odpovědí. To v některých případech umožňuje použít vylučovací metodu či tipovat správný výsledek, aniž by žák tušil, jak by na něj sám měl přijít. Také omezená nabídka odpovědí vylučuje některé chybné výsledky, ke kterým by žák mohl dospět. Vzhledem k charakteru úloh je mezi nimi možné nalézt takové, které obsahují práci s číselnou osou. Oproti tomu úlohy výzkumu PISA jsou vloženy vždy do kontextu reálného života a nemají nabídku odpovědí. Jelikož, jak je zmíněno výše, číselná osa se v reálném světě nevyskytuje, nenalezla jsem[5] mezi úlohami z tohoto výzkumu takovou, která by ji obsahovala. Úlohy, které se nejvíce blíží alespoň práci se stupnicí, jsou zaměřeny na vypočítání či odhadnutí obsahu např. podlahy bytu[6] či plochy, kterou zaujímá ropná skvrna[7], kde je uvedeno měřítko.

Výzkum TIMSS obsahuje úlohy s využitím stupnic[8] i úlohy, ve kterých se objevuje číselná osa. Číselná osa v úlohách na obrázcích 7a, 7b a 8b je dělena po jednotkách a má popsané všechny dílky, což je i v úlohách českých učebnic obvyklé (viz oddíl 3.2). Úloha na obrázku 8a se v těchto aspektech odlišuje. Všechny uvedené úlohy (na rozdíl od většiny těch v českých učebnicích) nemají dělení na menší dílky, přestože řešením není celé číslo. S úlohami v českých učebnicích se tyto úlohy shodují v tom, že mají vyznačeno číslo 0. Ve třech případech znázorněná část číselné osy nulou začíná, přestože dvě z těchto úloh jsou pro žáky 8. ročníku a ti znají i čísla záporná.



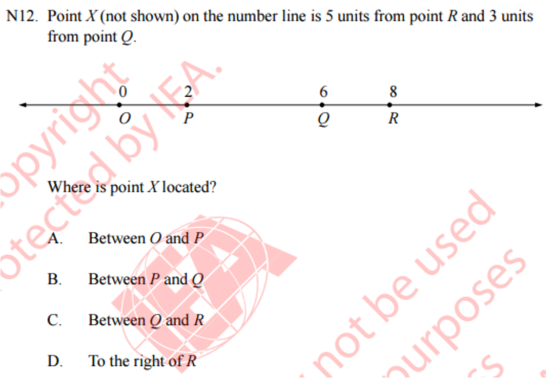
Obr. 7a Úloha TIMSS 2003, 4. roč. (IEA, 2003, s. 106)

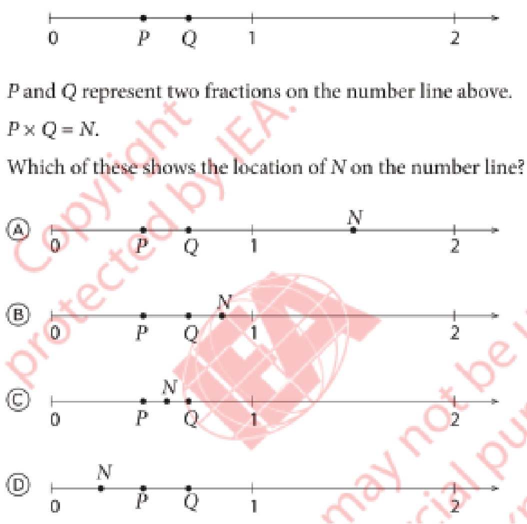


Obr. 7b Úloha TIMSS 1995, 8. roč. (IEA, 1999, s. 12)

Úloha z obrázku 7b byla zařazena do kategorie Zlomky a význam čísla a 68 % žáků ze zemí účastnících se výzkumu ji vyřešilo správně. Touto úlohou jsem se také částečně inspirovala pro 2. úlohu výzkumného šetření.

[5] do září 2016
[6] PISA, 2012. Dostupné z: http://www.csicr.cz/html/PISA2012-MG/html5/index.html?&locale=CSY&pn=15
[7] PISA, 2012, pilotní úloha.
[8] například: „Kolik délek lodi jsou od sebe dvě lodě vzdáleny“ (ČR, 2011), čtení z ciferníku (ČR, 2007, 4. i 8. roč.) Dostupné z: http://www.csicr.cz/html/TIMSS-Ulohy4Rocnik/flipviewerxpress.html, www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/TIMSS/TIMSS-2007/Ulohy-z-matematiky-a-PV-4-roc-publikace.pdf, http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/TIMSS/TIMSS-2007/Ulohy-z-mat-8-roc-publikace.pdf





Obr. 8a Úloha TIMSS 1995, 8. roč. (IEA, 1999b, s. 56) **Obr. 8b Úloha TIMSS 2007, 8. roč. (IEA, 2013, s. 73)**

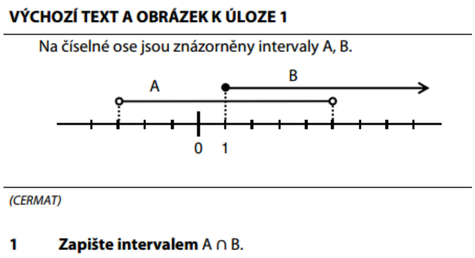
Úloha z obrázku 8a byla zařazena do kategorie Geometrie a žáci ze zemí účastnících se výzkumu v ní byli úspěšní z 66 %. V úloze velice podobné (obsahující pouze jiná čísla), která byla odtajněna v roce 1999, dosáhli žáci ze zemí účastnících se výzkumu úspěšnosti pouze 42 %. Úlohu z obrázku 8b jsem po jistých úpravách použila pro 3. úlohu výzkumného šetření. V šetření TIMSS byla tato úloha zařazena do tématu Zlomky a desetinná čísla a byla vedena jako úloha s kognitivním zaměřením na odůvodňování. Průměrná mezinárodní úspěšnost řešení byla 23 % a stejná byla úspěšnost českých žáků (Rendl, 2015, s. 224).

2.2 Úlohy s číselnou osou ve státních maturitách

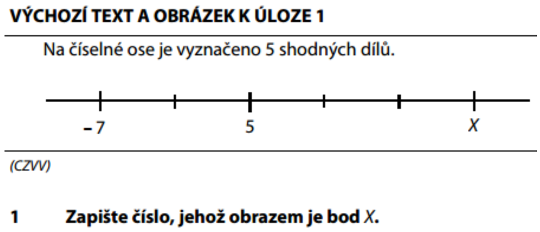
K září 2016[9] obsahovaly jak ilustrační, tak skutečně zadané testy státních maturit číselnou osu v úlohách, které byly zaměřené buď na intervaly, nebo na vyznačení čísel či přečtení vyznačených čísel na připravených číselných osách. Jedna úloha bez připravené číselné osy pracovala s absolutní hodnotou čísla. Tyto úlohy byly převážně řazeny na začátku testů, možná proto, že jsou považovány za snazší než ostatní.

První úloha zaměřená na práci s intervaly se objevila v ilustračním testu v roce 2012. V úloze šlo o vyznačení intervalu $\langle 2-n; n-3\rangle$ pro $n=5$ na číselné ose. Ta byla dělena po jednotkách, ale byly popsány jen rysky 0 a 1. Po této úloze následovala ještě jedna úloha se stejnou číselnou osou, kde bylo úkolem nalézt nejmenší přirozené číslo n, pro které existuje interval $\langle 2-n; n-3\rangle$, a tento interval vyznačit na číselné ose. Další úloha pracující s intervaly byla zadána při maturitách na podzim 2014. U této úlohy (obr. 9a) se předpokládá znalost číselné osy jako generického modelu reálných čísel. Použitá číselná osa má popsány stejné základní dvě rysky jako předchozí jmenovaná. Třetí úlohou, která se dá zařadit do této kategorie, je úloha z jara 2016. Je to sice úloha bez číselné osy, ale pro její řešení ji žák použije (zakreslí si ji, nebo má vytvořenu mentální číselnou osu). V úloze mají žáci zapsat pomocí intervalu sjednocení dvou zadaných množin. Tyto úlohy obsahují učivo převážně až střední školy.

[9] Testy jsou dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/



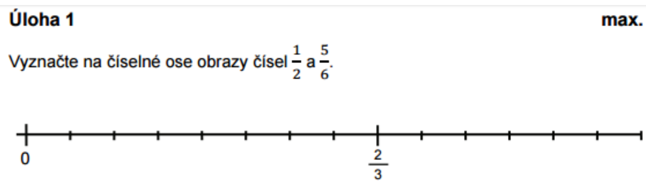
Obr. 9a Test podzim 2014 (CERMAT, 2014)



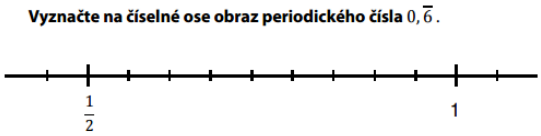
Obr. 9b Test jaro 2015 (CERMAT, 2015)

Další úlohy použité pro státní maturity či pro ilustrační testy se týkají pouze učiva základní školy. Jediná úloha, která byla při maturitách skutečně zadána, je ta na obrázku 9b. Úspěšnost maturantů v této úloze byla 84,5 %[10]. Úlohu jsem použila pro své výzkumné šetření, proto její podrobnější rozbor uvádím v oddíle 4.3.1. Po této úloze následovala v testu ještě úloha bez číselné osy, v níž se měla vypsat celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 3. Tuto úlohu úspěšně vyřešilo 51,7 % v tomto termínu maturujících,[11] což je překvapivé, když uvážíme, že číselná osa se pro absolutní hodnotu využívá poměrně běžně.

Další dvě úlohy, jedna z roku 2010 (obr. 10a) a druhá z roku 2013 (obr. 10b), byly pouze ilustrační a spočívaly ve vyznačení čísel na číselné ose. Tato čísla a dělení osy nejsou však zcela běžná. V první je interval $(0; \frac{2}{3})$ dělen na 8 menších dílků, není zde vyznačena jednotka, ale řešení vždy vychází na vyznačené rysky. Číselná osa ve druhé úloze nezačíná nulou a dělení je na devět dílků mezi $\frac{1}{2}$ a 1. I zde vychází zapisované periodické číslo na jednu z vyznačených rysek.



Obr. 10a Ilustrační test, 2010 (CERMAT, 2010)



Obr. 10b Ilustrační test 2013 (CERMAT, 2013)

Úlohy testů státních maturit jsou voleny tak, aby se daly odpovědi vyhodnotit jednoznačně, což by u úloh, kde by odpověď žák zaznamenával např. mimo vyznačené rysky, mohlo být sporné. Nedá se jednoznačečně říct, s jakou přesností musí být daná hodnota zaznamenána, aby byla ještě považována za správnou. Na druhou stranu jsou maturitní úlohy sestavovány tak, aby neodpovídaly běžně užívaným typům úloh a žák musel uplatnit své znalosti a schopnosti.

2.3 Výzkumy týkající se číselné osy

Ve výzkumech je číselná osa využívána především jako prostředek zjištění konceptuálních znalostí žáků např. zlomků (Rendl, 2015) nebo hustoty intervalu (Vamvakoussiová a Vosniadouová, 2004). Méně časté jsou výzkumy zaměřené přímo na dosahování dlouhodobých znalostí na základě užívání číselné osy jako nosného modelu. V oboru zlomků, jak potvrzuje rozsáhlá meta-analýza výzkumů (Geary a kol., 2008, s. 51), bylo provedeno málo výzkumů srovnávajících efektivnost různých reprezentací zlomků, které by měly dostatečný rozsah vzorku a přiměřené nástroje k měření závisle proměnné. Podle Rendla (2015) by bylo žádoucí se na takové výzkumy zaměřit a „ověřit efektivnost užití číselné osy jako centrální reprezentace zlomků“ (s. 252).

[10] z odpovědi na dotaz na Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT)
[11] z odpovědi na dotaz na CERMAT

Většina výzkumů týkajících se číselné osy se zaměřuje převážně na žáky prvního stupně. Vzhledem k charakteru diplomové práce však uvedu jen ty, které se věnují významným aspektům číselné osy.

Z výzkumů, které se zaměřily na zjišťování účinnosti využití číselné osy při výuce, uvedu výzkum, jehož autorem je Saxe a kol. (2012). Ten sledoval účinnost série 19 vyučovacích hodin, ve kterých byla pro výuku zlomků, celých čísel a absolutní hodnoty[12] využívána číselná osa jako hlavní strukturální model. Skupina tímto způsobem vyučovaných žáků 4. a 5. ročníku byla porovnávána s žáky vedenými běžnými metodami. Výzkumu se zúčastnilo 11 tříd (skupina LMR[13]), které byly vyučovány celým číslům a zlomkům prostřednictvím číselné osy, a 10 tříd vyučovaných běžným způsobem (kontrolní skupina). Žáci byli testováni před zahájením výuky (pre-test), v jejím průběhu (pouze skupina LMR), po výuce celých číslech a po skončení 19 výukových hodin (post-test). Poslední srovnávací testování (final test) proběhlo 5 měsíců po skončení experimentální výuky. V těchto testech byly úlohy jak s číselnou osou, tak bez ní. Úlohy s číselnou osou dopadly v pre-testu hůře než úlohy bez číselné osy u obou skupin. V post-testu dopadla skupina LMR výrazně lépe u úloh s číselnou osou než bez ní. V závěrečném testu (final test) se úspěšnost řešení úloh s číselnou osou i úloh bez ní u skupiny LMR vyrovnala. Žáci ze skupiny LMR, kteří patřili na základě pre-testu do skupiny s průměrnými výsledky, se v závěrečném testu umístili stejně dobře jako nejlepší žáci z kontrolní skupiny. Účinnost výuky celých čísel, zlomků a absolutní hodnoty prostřednictvím číselné osy potvrzují také závěrečné průměrné výsledky, které byly výrazně lepší u skupiny LMR (Saxe a kol., 2012).

V Belgii byl proveden výzkum zaměřující se na strategie žáků 2. ročníku v přesnosti odhadu přirozených čísel umístěných na číselnou osu v závislosti na dělení dané části číselné osy. Autoři Peeters a kol. (2015) o něm mluví jako o jednom z prvních výzkumů tohoto typu. Zjistili, že na číselné ose (0, 200) s vyznačenou střední ryskou žáci odhadovali čísla ležící kolem tohoto středu přesněji než na ose, která neměla dílek (0, 200) dělený, a dokonce ani žáci, kteří pracovali na ose s dělením tohoto dílku (0, 200) na čtvrtiny, nebyli úspěšnější. Poslední jmenovaní žáci podle autorů totiž často chybovali v interpretaci vyznačených rysek.

V Japonsku se, jak uvádí autoři výzkumu Shindo a Moriya (2015), číselná osa obvykle ve výuce používá např. k demonstrování poměru (relative values). Není však zřejmé, zda se používá i jako nástroj k řešení těchto úloh. Proto svůj výzkum s žáky 5. ročníku badatelé zaměřili na porovnání třídy, která měla u úloh na poměr připravené číselné osy, s třídou, která řešila tytéž úlohy, u nichž však nebyla číselná osa připravena a žák byl vyzván k jejímu sestrojení. Výsledkem bylo zjištění, že žáci s připravenými číselnými osami byli v řešení úloh mnohem úspěšnější než ti, kteří si je měli sami sestrojit. Také žáci, kteří byli schopni si sami osu narýsovat, byli v řešení úspěšnější než žáci, kteří to neuměli a řešili úlohy bez ní.

V České republice proběhl výzkum zaměřený na obtíže žáků 2. stupně se zlomky. Není tedy primárně zaměřen na číselnou osu, ale pro zjištění konceptuálních znalostí žáků v této oblasti byla číselná osa použita. Rendl (2015) dochází k závěru, že „zacházení s číselnou osou je pro naše žáky nezvyklé a činí jim potíže, že číselná osa dobře odhaluje některé aspekty nedostatečného konceptuálního porozumění zlomkům a že prostřednictvím konceptu smíšeného čísla žáci dospívali poměrně rychle (často již v první úloze) k základní orientaci ve velikosti nevlastních zlomků“ (s. 247). Také poukazuje na to, že se žáci během rozhovorů s dopomocí naučili číselnou osu rychle užívat. Autor dodává, že se během rozhovorů u některých žáků evidentně „vytvářela elementární korespondence mezi číselnými operacemi a pohybem na číselné ose.“ (s. 247) V tomto výzkumu si žáci vybírali z několika připravených číselných os, tedy si je nekonstruovali sami.

[12] V Kalifornii se zavádějí celá čísla dříve než zlomky a zároveň s celými čísly se již zavádí pojem absolutní hodnota čísla.

[13] learning mathematics through representations

PRAKTICKÁ ČÁST

3 Číselná osa ve vyučování

Číselná osa je pojem vyskytující se převážně v didaktických materiálech. Především proto, jak je psáno výše, že v reálném světě se nacházejí pouze stupnice. Číselná osa, pokud je efektivně využívána, může být dobrým prostředkem k pochopení různých oblastí vyučované látky i k zjišťování úrovně znalostí žáka. Totiž úlohy na číselné ose, které nejsou žákem běžně řešeny, mohou posloužit jako nástroj pro zkoumání kvality jeho poznatků. Tyto úlohy jsou stavěny tak, aby se na nich projevilo, zda zkoumané oblasti žák skutečně rozumí, nebo zda jsou jeho poznatky pouze formální.

3.1 Číselná osa v rámcovém vzdělávacím programu

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) uvádí, jakých znalostí by žák během vzdělávání měl nabýt. Jelikož je číselná osa více prostředkem k získání poznatků než sama o sobě cílem, je zmíněna pouze ve výstupech po 1. stupni. Zde se dá předpokládat její využití i mimo matematiku v běžném životě, jako je třeba schopnost číst hodnoty ze stupnic. Je možné, ale neověřitelné, že se také myslí na její využívání na 2. stupni, a proto by se žák již na 1. stupni s ní měl seznamovat. Na 2. stupni ZV se o číselné ose ovšem RVP nezmiňuje. Uvádím tedy část RVP, která převážně souvisí s číselnými obory, pro které je číselná osa nejvíce užívána (viz analýza učebnic v oddílech 3.2.1 a 3.2.2).

Na 1. stupni po absolvování 5. ročníku má žák dle očekávaných výstupů RVP ZV (2016) zvládat:

- zaokrouhlovat přirozená čísla, provádět odhady a kontrolovat výsledky početních operací v oboru přirozených čísel
- řešit a tvořit úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel
- modelovat a určovat část celku, používat zápis ve formě zlomku
- porovnat, sčítat a odčítat zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel
- přečíst zápis desetinného čísla a vyznačit na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty
- a rozumět významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo umět vyznačit na číselné ose

Znalosti a dovednosti, k jejichž získání je možné nebo prospěšné využívat číselnou osu, jsou v očekávaných výstupech RVP ZV (2016) pro 2. stupeň obsaženy převážně v oblasti Číslo a proměnná.

Žák:

- provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel
- zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor
- užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)
- analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel

3.2 Výskyt a využití číselné osy v učebnicích

Pro analýzu byly vybrány předně řady těch učebnic, které byly využívány pro výuku ve třídách, ve kterých proběhlo výzkumné šetření. Jde o učebnice, které byly využívány k výuce v 5. ročníku a o ty, které jsou využívány k výuce v současné době. Tyto učebnice byly doplněny těmi, které jsou běžně využívané na českých základních školách. Mezi analyzovanými učebnicemi nejsou ty, které jsou navzájem velice podobné (například Alter vydal více obsahově i strukturou podobných učebnic). Do analýzy učebnic pro 5. ročník jsem (z důvodů vypsaných níže) zařadila i příslušné pracovní sešity. Nakonec jsem tedy pracovala se sedmi učebnicemi a příslušnými pracovními sešity k těmto učebnicím pro 5. ročník a s pěti učebnicemi pro 2. stupeň základní školy.

Cílem analýzy učebnic bylo zjistit, pro která témata je číselná osa v učebnicích využívána a jak: zda je použita při vysvětlení látky nebo jen jako doplněk. Zajímalo mě, zda je číselná osa v různých učebnicích využívána stejným způsobem. Dále jsem sledovala (zvláště v učebnicích pro 5. ročník), jaké úlohy vyžadují práci s číselnou osou a v jakém počtu jsou v učebnicích použity. Důvodem byl fakt, že výsledky analýz jsem využila při sestavování úloh diagnostického testu. Seznam všech učebnic a pracovních sešitů použitých k analýze je v příloze 1 a 2.

3.2.1 Učebnice pro pátý ročník

V tabulce 1 jsou uvedena témata, v nichž se alespoň v jedné z analyzovaných učebnic vyskytla číselná osa. Protože učivo v sedmé analyzované učebnici M. Hejného a kol. není uspořádáno po jednotlivých tématech jako v ostatních analyzovaných učebnicích, ale spirálovitě, není tato učebnice součástí tabulky, ale bude rozebrána zvlášť. Protože nakladatelství Fraus vydává dvě řady učebnic matematiky, budu na učebnice Matematika se čtyřlístkem odkazovat jménem nakladatelství a na učebnice M. Hejného a kol. příjmením autora, tedy učebnice Hejného.

Pracovní sešity jsou na 1. stupni běžně používaným doplňkem učebnic. Aby nedošlo při analýze některé učebnice ke zkreslenému pohledu na ni v případě, kdy by plnila pouze výkladovou funkci, zatímco procvičování látky by bylo zajištěno pracovním sešitem, prošla jsem kromě učebnic i pracovní sešity. K učebnici nakladatelství Prodos je jako doplňující materiál místo pracovního sešitu vydána, a tedy analyzována *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky* a sešit *Matematické minutovky*. Oba materiály jsou od stejných autorů jako učebnice. V pracovních sešitech jsem si všímala pouze toho, zda v nich nejsou úlohy na číselné ose ve větší míře než v učebnicích (tedy nedoplňují to, co by v učebnici scházelo) a zda se v nich vyskytují stejné typy číselných os a úkolů s nimi.

V tabulce označuje X výskyt číselné osy při zavádění dané látky. Pokud se v učebnici vyskytuje příklad (řešená úloha), který nesouvisí přímo se zavedením látky, značím ho v tabulce zkratkou příkl. Samotné číslo v závorce vyjadřuje počet úloh věnujících se danému tématu, a to včetně úloh, kde je pouze vyzváno ke kontrole na číselné ose nebo doporučeno její využití. Úlohy byly zařazeny do tematického celku, jehož se týkaly, nezávisle na tom, do jaké kapitoly jsou zařazeny v učebnici. Většinou se však úlohy daného tématu vyskytovaly v odpovídající kapitole. Výjimku tvořily úlohy, které požadovaly jen umisťování čísel na číselnou osu či čtení čísel z ní. Ty byly zařazeny zvláště v kapitolách, které se věnovaly porovnávání čísel, a to za účelem připomenutí práce s číselnou osou. Číslo v závorce s připsaným st. značí úlohy na stupnicích, ne přímo na číselné ose. Témata, která se v učebnici nevyskytují, například protože byla v některých případech již uvedena v některé z učebnic pro nižší ročník, značím písmenem „n“.

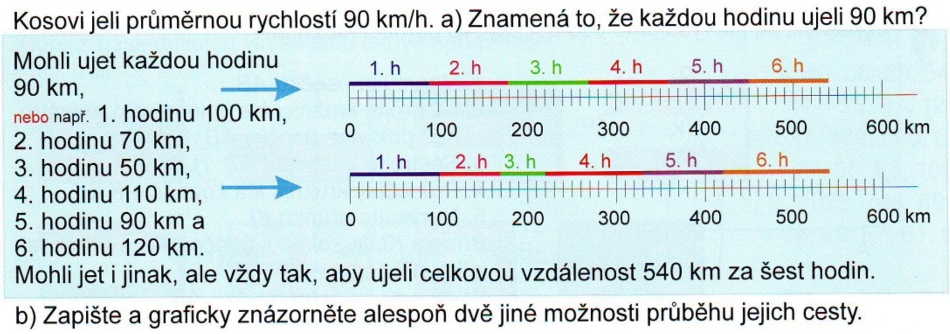
Tabulka 1: Číselná osa v učebnicích pro 5. ročník

učebnicové řady / témata	Matematika pro 5. ročník (Alter, 2014)	Matematika a její aplikace (Prodos, 2013 – 2015)	Matematika pro 5. ročník (Nová škola, 2014 – 2015)	Matematika pro 5. ročník (1+1 Studio, 2011)	Svět čísel a tvarů (Prometheus, 2013)	Matematika se čtyřlístkem (Fraus, 2015)
velká přirozená čísla[14]		(1)	(7)		(3)	
velká ℕ čísla: zaokrouhlování	(2)	X (4)	(1)		(1)	
(velká) ℕ čísla: porovnávání	(3)		(3)	X (2)		
(velká) ℕ čísla: sčítání a odčítání		(2)			(2)	
dělení se zbytkem				X		
odhad výsledku písemného násobení		n			n	X
aritmetický průměr			n	X (2)	n	n
desetinné zlomky a smíšená čísla (obraz na číselné ose, po zavedení)			(n[15])			X (3)
desetinné zlomky: porovnávání				n		X (3)
(sčítání, odčítání zlomků na úsečce)	(2)	n		n		X
desetinná čísla: zavedení					(až dál 1 st.; 1)	(až dál 1 st.)
desetinná čísla: obraz na číselné ose[16]	(4)	(1)	(2)	(2 příkl.)		X (4)
desetinná čísla: porovnávání		X (2)	(2)	(1; 4 st.)		X (3)
rovnost čísel „0,6 a 0,60“	X	X	X (1)	X		
desetinná čísla: sčítání	X	n	(2)	n		X (1 příkl.)
desetinná čísla: odčítání	X	n	(1)	n		
desetinná čísla: zaokrouhlování				n	X (2)	
celá čísla: zavedení[17]	(3; 1 st.)	X	(3 st.)	n	n	X (3; 2 st.)
celá čísla: porovnávání	x (2)			n	n	X (2; 1 st.)
celá čísla: sčítání, odčítání[18]	(2 st.)	(3)	n	n	n	n
celkový počet úloh včetně úloh na stupnicích (ne řešených příkladů)	19	11	22	9	10	21

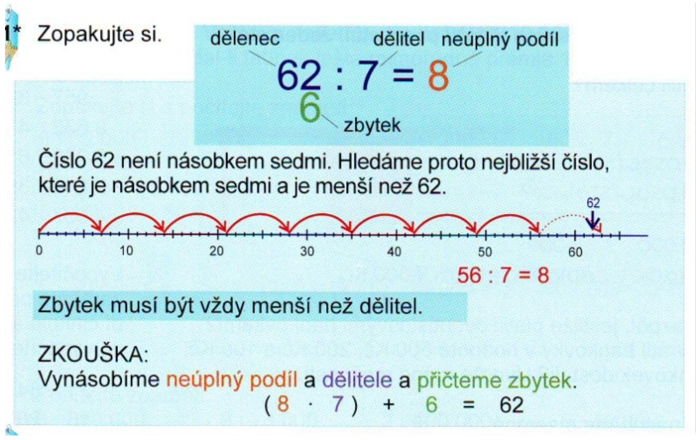
Číselná osa je nejvíce používána v tématu desetinných čísel, což také plyne z RVP, avšak ani v jedné z učebnic není použita jako prostředek při jejich zavádění. Oproti tomu v tématu zlomků

[14] Velká přirozená čísla se vyskytovala i v opakování ze čtvrtého ročníku; zavedení látky týkající se přirozených čísel se nachází spíše v učebnicích pro nižší ročníky.
[15] Učebnice nezavádí smíšená čísla.
[16] Obraz desetinného čísla na číselné ose má žák po pátém ročníku dle RVP znát.
[17] Žák po pátém ročníku zobrazuje záporné číslo na číselné ose (dle RVP).
[18] Operace na celých číslech se převážně zavádějí až ve vyšších ročnících.

ji využívá pouze učebnice Fraus. Za povšimnutí stojí, že učebnice nakl. 1+1 Studio používá číselnou osu neobvykle při vysvětlování aritmetického průměru (viz obr. 11) a dělení se zbytkem[19] (viz obr. 12), avšak u čísel celých a desetinných či u zlomků ji nevyužívají téměř vůbec, resp. tak, aby učebnice splňovala RVP: žák umí přečíst zápis desetinného čísla a vyznačit ho na číselné ose. Také je v RVP, že žák má umět vyznačit celé záporné číslo na číselné ose, ale to jsem v učebnici pro 5. ročník nenalezla vůbec. Zlomky žák dle RVP umí po 5. ročníku znázornit na různých modelech. Není zde ale řečeno, že by jedním z těchto modelů měla být číselná osa.

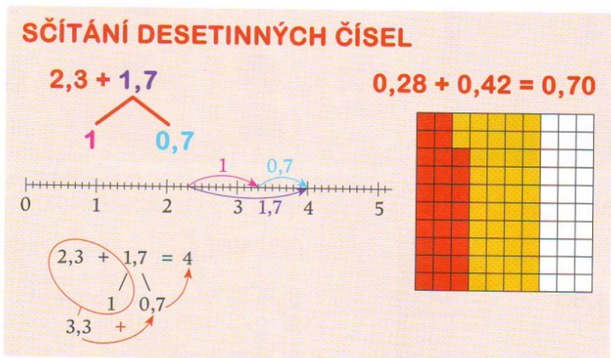


Obr. 11 Aritmetický průměr (1+1 Studio, 5. roč., 2. díl, s.15)



Obr. 12 Dělení se zbytkem (1+1 Studio, 5. roč., 1. díl, s. 16)

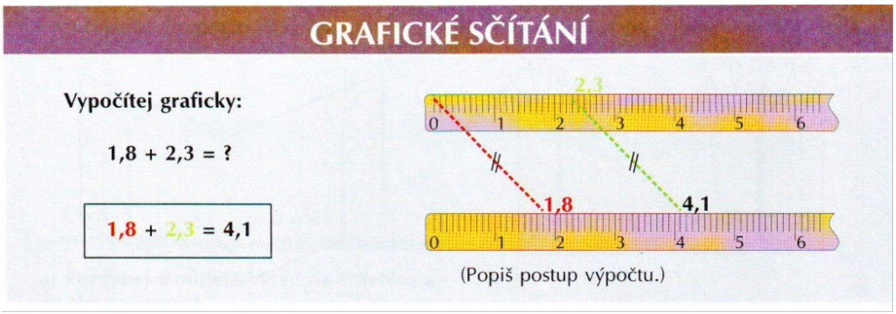
Za zmínku stojí také různé způsoby znázornění sčítání desetinných čísel, které se v učebnicích vyskytují. V učebnici Fraus (obr. 13) je sčítání znázorněno podobně jako například v učebnici Alter.



Obr. 13 Sčítání desetinných čísel (Fraus, s. 64)

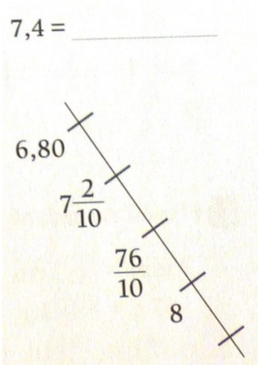
[19] Dělení se zbytkem se nachází ještě ve dvou úlohách v pracovním sešitě k učebnici nakl. Prometheus.

Odlišné znázornění pomocí dvou shodných stupnic (obr. 14) jsem našla v materiálu k řadám učebnic Prodos. Toto znázornění v žákovi podporuje představu (kladného) čísla jako vzdálenosti od počátku, na rozdíl od předchozího znázornění, kde je druhý sčítanec chápán více jako operátor změny.

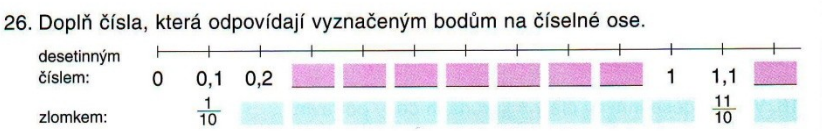


Obr. 14 Sčítání desetinných čísel (Prodos, *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky*, s. 41)

Číselná osa by mohla propojovat již známé poznatky s novými, např. mezi jednotlivými číselnými obory. Analýza učebnic ukázala, že se tak neděje. Především se tak ztrácí velká výhoda číselné osy, která umožňuje vytvářet spojitost mezi jednotlivými číselnými vyjádřeními, jako jsou především celá čísla, zlomky, smíšená čísla a desetinná čísla. Toto propojení jsem nenalezla ani v jedné úloze či příkladu v učebnicích nakladatelství Prometheus a 1+1 Studio. V učebnici nakladatelství Nová škola také není jediná zmínka, ani pracovní sešit k této učebnici tento nedostatek nedoplňuje. V něm se vyskytuje jen jedna úloha s komentářem. Učebnice Fraus propojuje na číselné ose ve dvou úlohách desetinné zlomky a smíšená čísla. V pracovním sešitě k této učebnici je úloh více (6) a na rozdíl od učebnice dokonce dvě úlohy (viz obr. 15), ve kterých se vyskytuje kombinace zlomků, smíšených a desetinných čísel. Jedna úloha obsahující desetinná čísla a zlomky na jedné číselné ose a jeden příklad u porovnávání desetinných čísel obsahující též zlomky se dá nalézt v učebnici Prodos. V učebnici Alter v tomto ročníku nebyly zlomky vůbec zobrazovány na číselné ose, přesto zde najdeme ve dvou úlohách (viz obr. 16) s následným komentářem alespoň nějaké propojení desetinných čísel se zlomky i na číselné ose (poté, co to bylo demonstrováno na jiných modelech).



Obr. 15 Číselná osa (Fraus, Pracovní sešit, 1. díl, s. 37)



Obr. 16 Desetinná čísla (Alter, s. 90)

V každé z analyzovaných řad učebnic, kromě učebnice Prometheus, se alespoň jednou vyskytla číselná osa v souvislosti s porovnáváním čísel a poučkou, že obraz menšího čísla leží na číselné ose vždy nalevo od obrazu většího čísla. V některých případech (Fraus, celá čísla; Prodos, desetinná čísla) je tato poučka založena na zkušenosti žáka nabyté při práci s obrazy čísel na číselné ose, a tedy logicky z předešlých úloh vyplývá. Také se ale v učebnicích stává, že je dána poučka, aniž by jí předcházely (nebo by po ní následovaly) úlohy, ve kterých by ji žáci využívali (např. Alter, záporná a kladná čísla; 1+1 Studio, desetinná čísla).

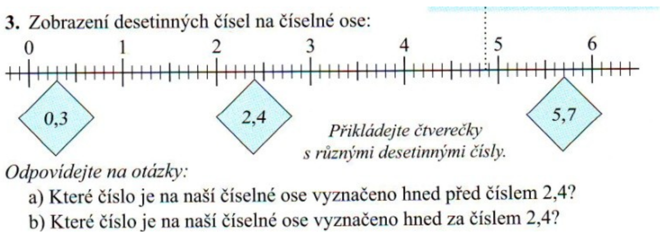
Typové úlohy

V analyzovaných učebnicích uvedených v tabulce 1[20] se často vyskytují úlohy s typově podobnými číselnými osami. Práci v rámci těchto úloh dále popisuji jako mechanickou, protože se žák naučí řešit jen takto zadanou úlohu podle algoritmu, který je mu ukázán, aniž by musel prokázat pochopení zápisu obrazů čísel na číselnou osu. Stejně tak úlohy, které mají tyto typově podobné číselné osy, nazývám typovými nezávisle na zadání úlohy. O typovém zadání budu mluvit v případě, mám-li na mysli velice často se vyskytující zadání úlohy. Mluvím-li o zadání úlohy, míním jeho textovou část, tedy instrukce k činnosti, ne číselnou osu či stupnici. Typovým zadáním je čtení čísla z číselné osy a znázornění čísla na ní. Je to nejčastější zadání, které se v učebnicích a pracovních sešitech vyskytuje. V o něco menším počtu se vyskytují úlohy na porovnávání čísel (stejných reprezentantů). Ještě lze nalézt několik úloh na aditivní operace a několik málo na zaokrouhlování. Jiné typy úloh jsou spíše výjimkou.

Ve většině úloh, tedy v typových úlohách, začíná[21] číselná osa nulou (v učebnici Alter je to v menším množství než v jiných). Toto není vždy pravda při znázorňování velkých přirozených čísel a také se to přirozeně netýká kapitoly, která se věnuje záporným číslům. V ní je typicky zobrazena část číselné osy souměrná (až na znaménko) podle počátku. Typicky je v učebnicích z tabulky 1 číselná osa dělena na dílky, s nimiž má žák v dané úloze pracovat (tzn. rysky jsou naznačeny po stotisících, …, přirozených číslech, desetinách či setinách). Toto dělení jsem nenašla pouze v jedné úloze v pracovním sešitě k učebnici Alter a ve čtyřech úlohách v pracovním sešitě k učebnici Fraus, kde ve dvou případech (např. obr. 18) úloha obsahovala nápovědu, že si žák má dělení osy pomocí pravítka sám doplnit a že jednotka odpovídá 1 či 10 cm. Tento stereotyp v zobrazování číselné osy by mohl vést k přesvědčení, že jednotka vždy odpovídá jednomu centimetru (popřípadě při přiblížení 10násobku či 100násobku).

Dalším typickým znakem většiny číselných os ve zkoumaných učebnicích z tabulky 1 je způsob popsání rysek. Rysky na číselné ose jsou popsány pravidelně po desítkách, celých číslech nebo po desetinách (při dělení na setiny). Také někdy bývají popsány pravidelně po pěti či 0,5.

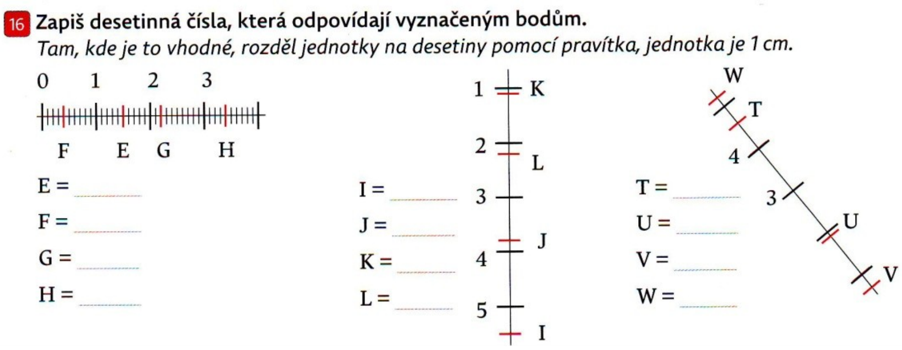
V učebnici Nová škola obsahuje první z velmi mála úloh na číselné ose otázky „Které číslo je na naší číselné ose vyznačeno hned za/před číslem 2,4?“ (obr. 17), které mohou v žákovi vytvořit nesprávnou představu následnosti čísel na číselné ose. Žák nemusí pochopit, že slovo „naší“ není v otázce bezúčelně, ale je v otázce tím omezujícím prvkem, který vyjadřuje, že není obecným pravidlem číselné osy, že hned za číslem 2,4 je vyznačeno číslo 2,5. Navíc je zde problém terminologie, protože není zřejmé, co se myslí vyznačením (zda ryska nebo popsaná ryska).



Obr. 17 Zobrazování desetinných čísel (Nová škola, 2. díl, s. 9)

Další úlohou, která může být pro žáka matoucí, je např. ta na obrázku 18, která má blízko k popření poučky vyskytující se v učebnicích, a to, že obraz většího čísla je více vpravo než obraz menšího.

[20] Především v učebnicích nakl. Prometheus a 1+1 Studio je příliš málo úloh s číselnou osou, aby mohly být samostatně považovány za typové.
[21] Slovem *začíná* míním „je zobrazena od“.



Obr. 18 Desetinná čísla (Fraus, Pracovní sešit, 2. díl, s.15)

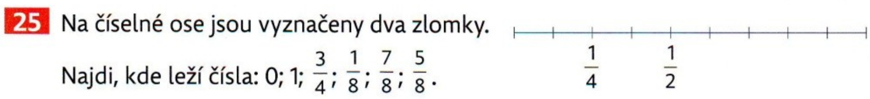
Z tabulky 1 je vidět, že celkově je v učebnicích nedostatek úloh s číselnou osou. Žák tedy nemá dostatek příležitostí, aby se pro něj číselná osa stala generickým modelem daných číselných reprezentantů a dobrým prostředkem ke správnému chápání čísla v různých číselných vyjádřeních.

<u>Hejného učebnice</u>

Učebnice matematiky Hejného se liší od předešlých učebnic v mnoha aspektech. V učebnici pro 5. ročník, na který jsem se zaměřila, se ve srovnání s ostatními analyzovanými učebnicemi vyskytuje nejméně úloh s číselnou osou, ale jejich typy a rozložení v učebnici je mnohem různorodější. V učebnici se s číselnou osou pracuje průběžně a jelikož struktura učebnice nepředkládá učivo nárazově po tématech, úlohy se vyskytují v celé učebnici. Také nelze dost dobře říci, že by byla číselná osa používána pro zavádění látky, protože v této učebnici není látka explicitně vysvětlována (zákonitosti, které žáci objeví, jsou pouze matematicky pojmenovány), přesto je jako prostředek v úlohách používána.

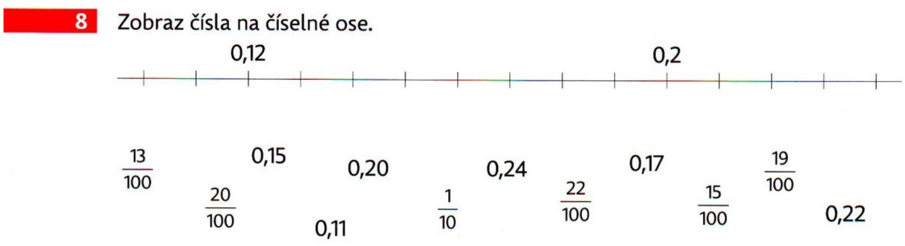
Úlohy explicitně nevyžadují od žáka čtení čísel vyznačených na číselné ose, ale pouze vyznačení obrazů čísel na ose a porovnávání čísel. Pravděpodobně se předpokládá, že ke správnému zaznamenání čísel na osu je správné čtení z osy nutné.

Tato učebnice je mezi analyzovanými jediná, která obsahuje úlohy se zlomky na číselné ose a dokonce ne jen desetinnými (obr. 19), řadím je mezi netypové.



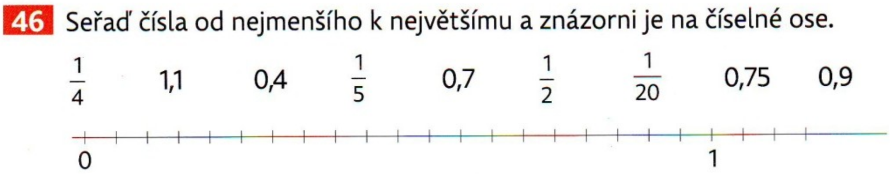
Obr. 19 Kapitola Řady (Hejný, s. 67)

Úloha na obrázku 19 ilustruje v učebnici a pracovních sešitech Hejného jeden z častějších typů číselných os takových, které nemají vyznačenu nulu a číslo 1. Číselné osy v těchto úlohách obvykle nemají popsány všechny hlavní (tj. setinné, desetinné, celé, …) rysky (obr. 19, obr. 20) a také nemají zobrazeny rysky všech čísel, které má žák na osu zapsat či s kterými pracuje (např. obr. 22).



Obr. 20 Desetinné číslo, zlomek (Hejný, Pracovní sešit 2, s. 28)

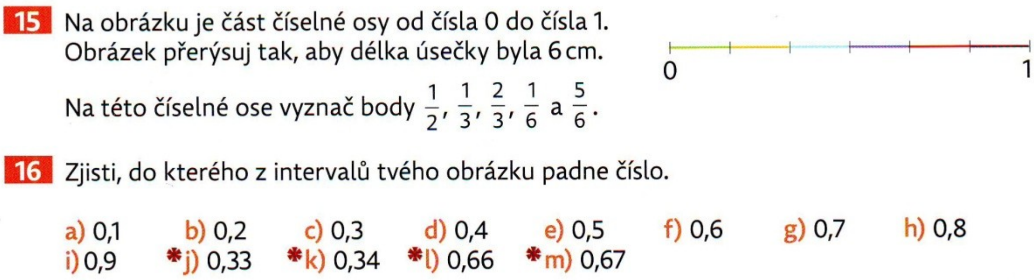
Dalším zásadním rozdílem mezi učebnicemi vypsanými v tabulce 1 a touto učebnicí je, že využívá přirozenou vlastnost číselné osy pro propojování desetinných čísel a zlomků. Pouze jedna úloha se věnuje samotným desetinným číslům, tři úlohy jen zlomkům, kdežto zbytek úloh (4 v učebnici a všechny 4 z pracovních sešitů, tedy většina z celkových 12 úloh) vždy obsahuje propojení mezi desetinnými čísly a zlomky (viz obr. 21, obr. 22 a obr. 20). Toto propojení je zde uvedeno i v souvislosti s převody jednotek délky, které jsou znázorněny na pravítku.


46 Seřaď čísla od nejmenšího k největšímu a znázorni je na číselné ose.

$\frac{1}{4}$ 1,1 0,4 $\frac{1}{5}$ 0,7 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{20}$ 0,75 0,9

Obr. 21 Co už umíme (Hejný, s. 102)

U úlohy z obrázku 21 si lze všimnout, že na rozdíl od typových úloh v předešlých učebnicích nemá číselná osa rozdělen interval od nuly do čísla 1 na deset dílků (stejně je tomu i u většiny dalších úloh z učebnice). Výhoda tohoto dělení jednotkového intervalu je patrná v následující úloze (obr. 22). V ní je použito spojení, že jeden dílek odpovídá jednomu centimetru, ale vzhledem k délce úsečky, která obsahuje pouze 6, a ne 10 takových dílků, se nemůže vytvořit spojitost mezi číslem udávající vzdálenost rysky od nuly v jednotkách délky a shodným číslem odpovídajícím obrazu čísla na číselné ose.


15 Na obrázku je část číselné osy od čísla 0 do čísla 1. Obrázek přerýsuj tak, aby délka úsečky byla 6 cm.

Na této číselné ose vyznač body $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ a $\frac{5}{6}$.

16 Zjisti, do kterého z intervalů tvého obrázku padne číslo.

a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3 d) 0,4 e) 0,5 f) 0,6 g) 0,7 h) 0,8
i) 0,9 *j) 0,33 *k) 0,34 *l) 0,66 *m) 0,67

Obr. 22 Desetinné číslo, zlomek, interval (Hejný, s. 81)

Za zmínku stojí ještě úloha, kde je pro číselnou osu připravena pouze rovná čára a žák si sám zvolí rozvržení čísel na číselné ose. Přímo takovýto typ úlohy jsem v jiné z analyzovaných učebnic pro 5. ročník nenašla. Za obdobné by mohly být považovány úlohy, kde je žák vyzván, aby si sám pomocnou číselnou osu narýsoval. V těchto případech je však pravděpodobnější, že žák nejprve zvolí jednotku a osu narýsuje, kdežto tato úloha v učebnici Hejného dává omezený prostor a je nutné odhadnout nejprve rozvržení čísel, aby se na osu vešla, a teprve podle toho volit jednotku.

Díky těmto popsaným znakům číselných os vyžadují úlohy mnohem větší pochopení čísel a jejich zobrazování na číselné ose, a omezují tak možnost mechanické práce na číselné ose. Úlohy tak upevňují číselnou osu jako generický model čísel.

3.2.2 Učebnice druhého stupně

Symboly použité v tabulce 2 jsou stejné jako v tabulce 1Tabulka 1. Učebnice M. Hejného a kol. není ze stejných důvodů jako v předchozím oddíle v tabulce uvedena. Jelikož jsem z učebnic M. Hejného a kol. pro druhý stupeň měla možnost projít pouze díl A a B, který odpovídá 6. a polovině 7. ročníku, a další díly v době zpracování diplomové práce ještě nevyšly, není srovnání s touto řadou učebnic zcela kompletní. Přesto se z charakteru učebnice dá mnoho poznat o stylu používání číselné osy. Nelze však například určit, i když se to dá předpokládat, zda se stejně hojně bude vyskytovat číselná osa i v učebnicích pro vyšší ročníky. Přestože se nedá příliš porovnávat s ostatními učebnicemi po tématech či kapitolách, některé úlohy z učebnic M. Hejného a kol. se dají (více jak v učebnici pro 5. ročník) vztáhnout k tématům ostatních analyzovaných učebnic. Proto některé úlohy z této učebnice zařadím do textové analýzy k ostatním učebnicím, aby dokreslily podobnost či rozdílnost charakteru učebnic. Na učebnice budu odkazovat jejich nakladatelstvími, a protože Prometheus vydal dvě řady učebnic, budu na řadu pro gymnázia odkazovat nakladatelstvím a na řadu pro základní školy běžně v řeči používaným označením „Odvárko a Kadleček". Na učebnice M. Hejného a kol. pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia, přestože je vydává od ostatních odlišné nakladatelství H-mat, o. p. s., budu pro zachování spojitosti s Hejného učebnicí pro 5. ročník odkazovat stejně jako v předchozím oddíle.

Tabulka 2: Číselná osa v analyzovaných řadách učebnic pro 2. stupeň

	Fortuna (2007 – 2010)	Odvárko a Kadleček (2010 – 2014)	Fraus (2007 – 2010)	Prometheus (2009 – 2015)
opakování: ℕ: zobrazení	(3)	(3; 1 příkl.)	X	(3)
opakování: ℕ: porovnávání		(4; 3 příkl.)	(5 příkl.)	X
opakování ℕ: zaokrouhlování	X (1)			X
opakování: zlomky		(1 st.)		
opakování: desetinná čísla: zobrazení	X (5)	(1)		X (1 st., 1)
opakování: desetinná čísla: porovnávání				X (1)
opakování: desetinná čísla: zaokrouhlování, operace				
desetinná čísla: zavedení	(1)			X (5 příkl.; 12)
desetinná čísla: porovnávání	(1)	X (7)		X
desetinná čísla: zaokrouhlování			X	(1)
desetinná čísla: operace				
zlomky: zavedení			(3 st.; 1)	
zlomky: zobrazení	X (2 příkl., 9)	X (2)	(3 úsečky)	(1 příkl.)
zlomky: krácení a rozšiřování				
zlomky: porovnávání	X (2 příkl.; 3)	X (4)		X (7)
zlomky: operace aditivní				X (1)
zlomky: operace multiplikativní	X (1 příkl.)	(2 příkl.)	(1 úsečka)	
celá čísla: zavedení	3 st.	(1 st.)	(1 st.)	X (7 st.; 4 příkl.; 5)
celá čísla: znázornění	X (5)	X (1)		
celá čísla: porovnávání	X (1 st.; 1)	X (4)	X (1 příkl.)	X (1 st.; 8 příkl.)
celá čísla: aditivní operace	X (7 příkl.; 4)	X (7 příkl.)	X (1)	X (28)
celá čísla: multiplikativní operace	X (3 příkl.)		X (2)	

absolutní hodnota	X (3)	X (1)	X	x
násobek a dělitel (složená čísla)	X	(1 příkl.)		X (2 příkl.)
aritmetický průměr				
soustava souřadnic				X (11)
iracionální čísla		n		X
reálná čísla	X	n	n	
nerovnice (intervaly)	X (2, 2 příkl.)	n		X (1 st.; 2 příkl.; 6)

Nebudu se více věnovat tomu, co se v učebnicích vyskytuje v opakování z 5. ročníku, protože ten byl rozebrán výše. Jen dodám, že úlohy využívající číselnou osu jsou zastoupeny velmi málo a že nejvíce je číselná osa využita k vysvětlení látky v rámci opakování v učebnici pro gymnázia Prometheus, kde se klade důraz na to, že se nově vzniklé třídní kolektivy sestavily z žáků příchozích z různých škol.

Desetinná čísla

Kapitoly věnované desetinným číslům probíraným v 6. ročníku či primě celkově neobsahují mnoho výkladu či úloh pracujících s číselnými osami, je jich mnohem méně než v učebnicích 5. ročníku. V učebnici Prometheus je uvedeno při zavádění desetinných čísel více příkladů a úloh s číselnou osou než v ostatních učebnicích, avšak jejich potenciál pro rozvoj číselných představ žáka a pro další získávání schopnosti pracovat na číselné ose není vzhledem k velké podobnosti úloh a příkladů (viz níže) v této učebnici velký. Úlohy žáka podněcují spíše k mechanické práci na číselné ose. Číselná osa byla nejvíce použita pro porovnávání desetinných čísel, ostatně stejně jako tomu je i u jiných číselných reprezentantů, ale ani v jedné z učebnic nebyla použita pro znázornění operací s desetinnými čísly.

Zlomky (7. ročník, prima/ sekunda)

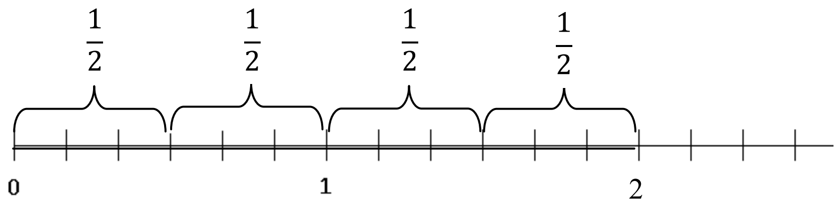
Oproti analyzovaným učebnicím pro 5. ročník je až zde ukázáno, jak zobrazit zlomky na číselné ose. Ale stejně jako u desetinných čísel ani u zlomků není číselná osa prostředkem k jejich zavedení, ale spíše jako doplnění dalšího modelu znázornění těchto čísel. Pouze učebnice Fraus zobrazuje v úvodu kapitoly různé stupnice (teploměr, metr, odměrný válec, úhloměr, ručičkové stopky), na kterých mají žáci rozeznávat, na jaké dílky jsou děleny, přesto však nepřejde od stupnic a úseček k číselné ose. Zcela nevyužit je potenciál číselné osy při výuce rozšiřování a krácení zlomků, které je na ní velmi názorné. Z analyzovaných učebnic se při zavádění této látky nevyskytuje číselná osa ani v jedné. Kromě učebnice Fraus je v ostatních učebnicích z tabulky 2 porovnávání zlomků nejen na úsečkových a jiných modelech, ale vyskytuje se i na číselné ose. Bohužel však většina zlomků, které má žák zobrazovat (s výjimkou ojedinělé práce se smíšenými čísly) či porovnávat, je menších než 1, čemuž odpovídá i charakter příslušných číselných os. V tomto je učebnice Hejného odlišná, protože v ní se umísťování zlomku většího než 1 na číselnou osu nachází vícekrát.

Poučení o způsobu porovnávání se vyskytuje v každé z učebnic uvedených v tabulce 2. Celkově však žák pro velký nedostatek úloh nemá mnoho příležitostí k procvičování práce se zlomky na číselné ose, a tak nedochází k prohlubování jejich porozumění a propojování s ostatními číselnými vyjádřeními prostřednictvím číselné osy.

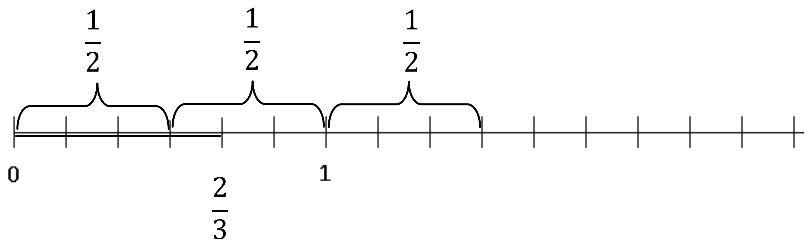
Vzhledem k výše řečenému je celkem překvapivé, že je číselná osa v některých řadách učebnic z tabulky 2 využita pro znázornění některých operací se zlomky. Pro znázornění sčítání zlomků jsou využity jiné modely než číselná osa. Pro odčítání je využita číselná osa pouze v učebnici Prometheus. Zde se konstatuje nedostatečnost ostatních modelů pro znázornění odčítání většího kladného zlomku od menšího kladného zlomku, a proto je voleno znázornění na číselné ose. Násobení nebo dělení zlomkem je znázorněno na číselné ose/ stupnici dokonce ve dvou řadách učebnic. Odvárko a Kadleček uvádějí příklad násobení zlomku přirozeným číslem (obr. 23) a dělení zlomku zlomkem (obr. 24), což je obdobně pro dělení přirozeného čísla zlomkem ukázáno i v učebnici Fortuna (obr. 25). Složitější operace se dvěma zlomky se v učebnicích takto neznázorňují, přestože by se to dalo udělat například následovně (toto znázornění však není zcela intuitivní).

Dva způsoby, jak se dá dospět k dělení dvou zlomků takových, že výsledkem nebude přirozené číslo (to je uděláno ve výše zmíněné učebnici), vychází z metody postupného uvolňování konstant. Zde je pouze stručný návrh. Žák by řešil takových úloh více.

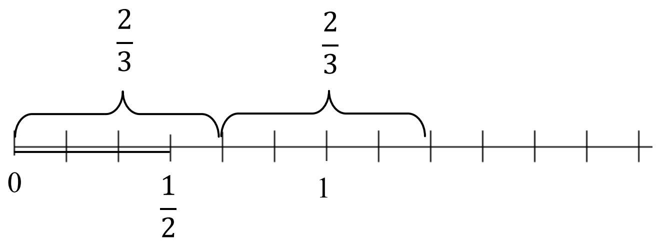
$2:\frac{1}{2}=4$ Kolikrát se vejde $\frac{1}{2}$ do 2? Čtyřikrát.



$\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$ Kolikrát se vejde $\frac{1}{2}$ do $\frac{2}{3}$? Jednou a ještě $\frac{1}{3}$ krát, což jsou $\frac{4}{3}$.

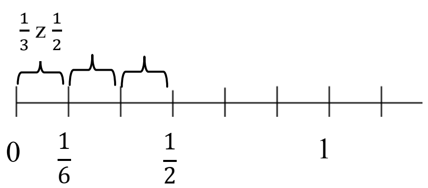


$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ Kolikrát se vejdou $\frac{2}{3}$ do $\frac{1}{2}$? Ani jednou, jen $\frac{3}{4}$ z nich se tam vejdou.



Z druhého způsobu je lépe vidět souvislost dělení s násobením převráceným zlomkem. Pokud by to žák odvozoval sám, musely by předcházet úlohy na dělení přirozených čísel na ose. Číselná osa je uvedena pro názornost jen u prvního řádku a u řádku, kde se poprvé dělí zlomkem, ale patří ke každému následujícímu řádku.

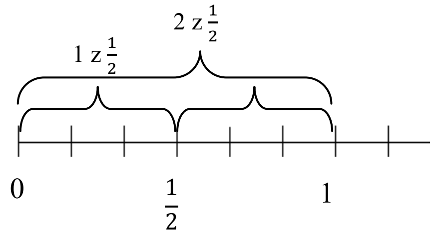
$\frac{1}{2}:\mathbf{3}=\frac{1}{6}$ dělím $\frac{1}{2}$ třemi tj. beru $\frac{1}{3}$ z $\frac{1}{2}$, tj. „třetinkrát“ jednu polovinu



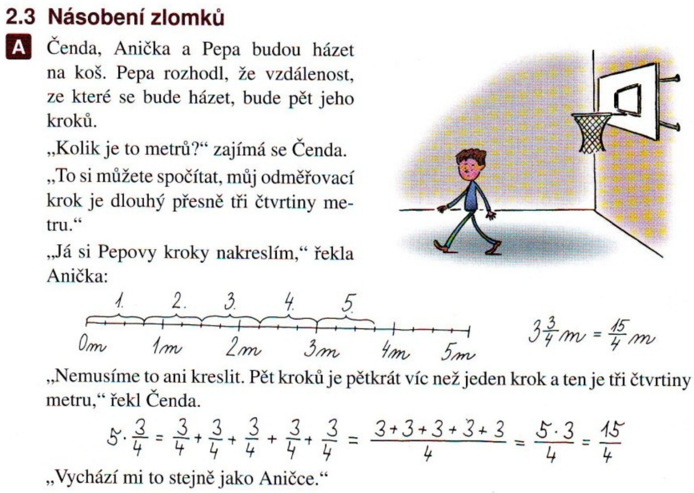
$\frac{1}{2} : \mathbf{2} = \frac{1}{4}$ dělím $\frac{1}{2}$ dvěma tj. beru $\mathbf{\frac{1}{2}}$ z $\frac{1}{2}$, tj. „polovinkrát“ jednu polovinu

$\frac{1}{2} : \mathbf{1} = \frac{1}{2}$ dělím $\frac{1}{2}$ jednou tj. beru **1** z $\frac{1}{2}$, tj. „jedenkrát“ jednu polovinu

$\frac{1}{2} : \mathbf{\frac{1}{2}} = 1$ dělím $\frac{1}{2}$ jednou polovinou tj. beru **2** z $\frac{1}{2}$, tj. „dvakrát“ jednu polovinu



$\frac{1}{2} : \mathbf{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ dělím $\frac{1}{2}$ jednou třetinou tj. beru **3** z $\frac{1}{2}$, tj. „třikrát“ jednu polovinu



2.3 Násobení zlomků

A Čenda, Anička a Pepa budou házet na koš. Pepa rozhodl, že vzdálenost, ze které se bude házet, bude pět jeho kroků.

„Kolik je to metrů?“ zajímá se Čenda.

„To si můžete spočítat, můj odměřovací krok je dlouhý přesně tři čtvrtiny metru.“

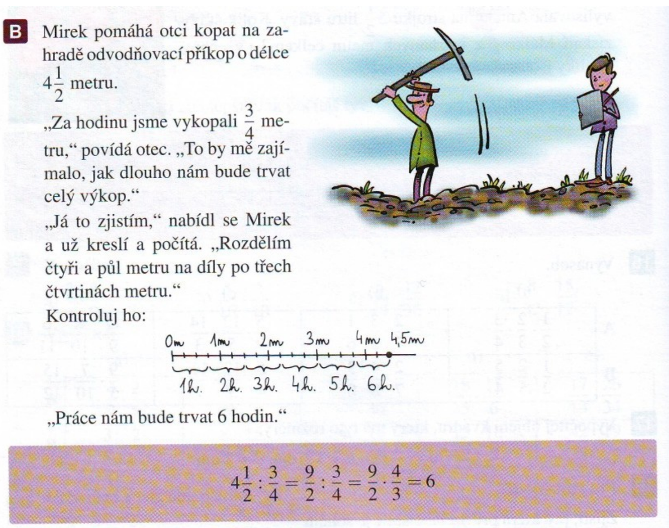
„Já si Pepovy kroky nakreslím,“ řekla Anička:

„Nemusíme to ani kreslit. Pět kroků je pětkrát víc než jeden krok a ten je tři čtvrtiny metru,“ řekl Čenda.

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$$

„Vychází mi to stejně jako Aničce.“

Obr. 23 Násobení zlomků (Odvárko, Kadleček, 7. roč., 1. díl, s. 35)



B Mirek pomáhá otci kopat na zahradě odvodňovací příkop o délce $4\frac{1}{2}$ metru.

„Za hodinu jsme vykopali $\frac{3}{4}$ metru,“ povídá otec. „To by mě zajímalo, jak dlouho nám bude trvat celý výkop.“

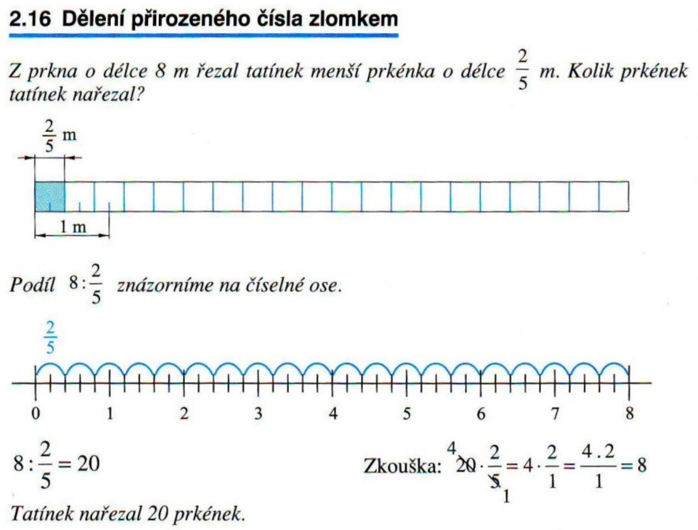
„Já to zjistím,“ nabídl se Mirek a už kreslí a počítá. „Rozdělím čtyři a půl metru na díly po třech čtvrtinách metru.“

Kontroluj ho:

„Práce nám bude trvat 6 hodin.“

$$4\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 6$$

Obr. 24 Dělení zlomků (Odvárko, Kadleček, 7. roč., 1. díl, s. 40)

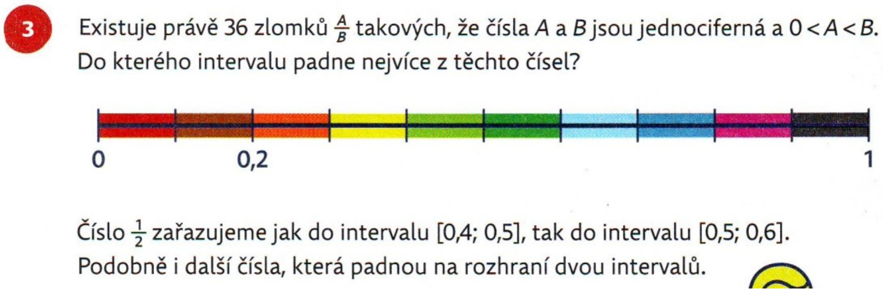


Obr. 25 Dělení zlomků (Fortuna, 7. roč., s. 72)

Propojování zlomků a desetinných čísel

Při probírání zlomků se jejich spojitost s desetinnými čísly demonstrovaná na číselné ose objeví v učebnici Odvárka a Kadlečka pouze v jedné úloze, kde má žák zapsat čísla vyznačená na číselné ose jak pomocí desetinného zlomku, tak desetinného čísla. V učebnici Prometheus je tato souvislost pouze demonstrativně ukázána na jednom příkladu. Fortuna má v kapitole zlomků také jen jednu takovouto úlohu. Výhodou, kterou má číselná osa na rozdíl od jiných modelů, je názornost souvislostí mezi jednotlivými číselnými reprezentanty. Když nedocházelo k propojení zlomků a desetinných čísel na číselné ose v kapitolách, které se věnují těmto tématům, očekávalo by se propojení v kapitole, kde se tato číselná vyjádření spolu s dalšími spojují do racionálních čísel.

Na stranách věnovaných racionálním číslům se zavádějí záporné zlomky a záporná desetinná, popř. smíšená čísla a zobrazují se na číselných osách odděleně, popřípadě dochází k jejich vzájemnému propojování mezi sebou bez číselné osy. V učebnici Prometheus se pouze ukazuje souvislost mezi celými čísly a zlomky a Odvárko a Kadleček v učebnici ukazují jednu osu zobrazující různá racionální čísla a úlohu, ve které mají žáci porovnat již vyznačená racionální čísla. Učebnice Fortuna se z výše jmenovaných učebnic tomuto propojení věnuje v největší míře. Racionální čísla totiž zavádí na číselné ose, kde ukazuje, jak se různě zapsaná čísla zobrazují do jednoho bodu. Také na číselné ose vysvětluje, jak porovnávat racionální čísla mezi sebou, a obsahuje i více úloh (konkrétně 6), které se řeší pomocí číselné osy a zahrnují různá racionální čísla. K propojování zlomků s desetinnými čísly pomocí číselné osy dochází ve větší míře pouze v této učebnici (Fortuna) a v učebnici Hejného, ve které je spíše výjimkou, když se v úloze, která to umožňuje, pracuje samostatně buď s desetinnými čísly, nebo jen se zlomky. K jejich propojování v učebnici Hejného nedochází jedním stejným způsobem v celé učebnici, ale téměř pokaždé jinak. Jako příklad bych uvedla úlohu, která je (jako jediná) zařazena pod jednu z kapitol (v učebnici B) o racionálních číslech.



Obr. 26 Racionální čísla (Hejný, díl B, s. 68)

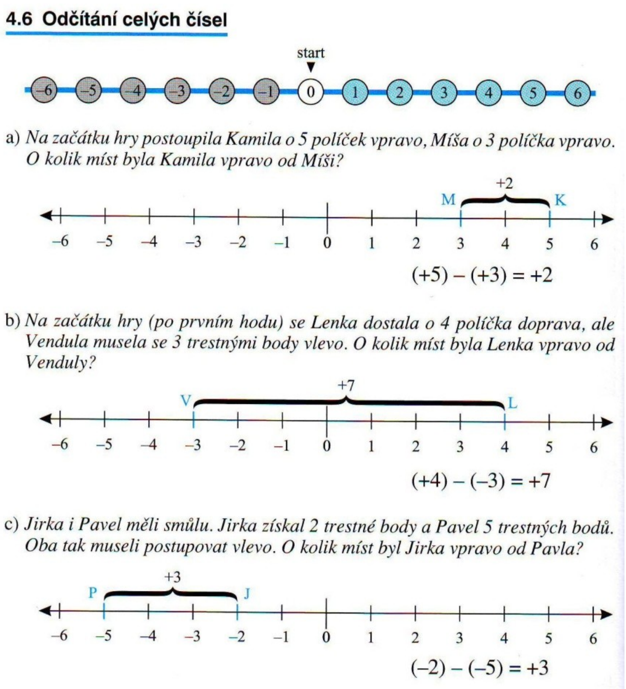
Celá čísla (7. ročník/ prima)

Při zavedení celých čísel jsou využity izolované modely stupnic (především teploměru) ve všech analyzovaných učebnicích. Liší se však důkladností při využití této stupnice. Téměř nevyužita je v učebnici Fraus, kde je pouze ilustrace teploměru s jednou úlohou, kde však není zachycena žádná spojitost s číselnou osou. V ostatních učebnicích je propojení na číselnou osu zřejmé. V učebnici Odvárka a Kadlečka je jednou úlohou přímo zachycen přechod od stupnic k číselné ose. V ní se čte odchylka ze svislé stupnice a zakresluje se na číselnou osu. Kapitolu celých čísel zcela postavila na číselné ose učebnice Fortuna. V učebnicích Hejného probíhá příprava žáka na přijetí celých čísel již od nižších ročníků v rámci prostředí Panáček, které je uplatňováno nejprve jako prostředí Krokování a později jako Schody. V prostředí krokování např. povel čelem vzad názorně vysvětluje mínus před závorkou v číselném výrazu. Prostředí Schody, kde každý schod má své číslo jako adresu, je sémantickým ukotvením číselné osy a vysvětluje operace s celými čísly (kromě dělení).

Tabulka 3: Operace s celými čísly s využitím číselné osy

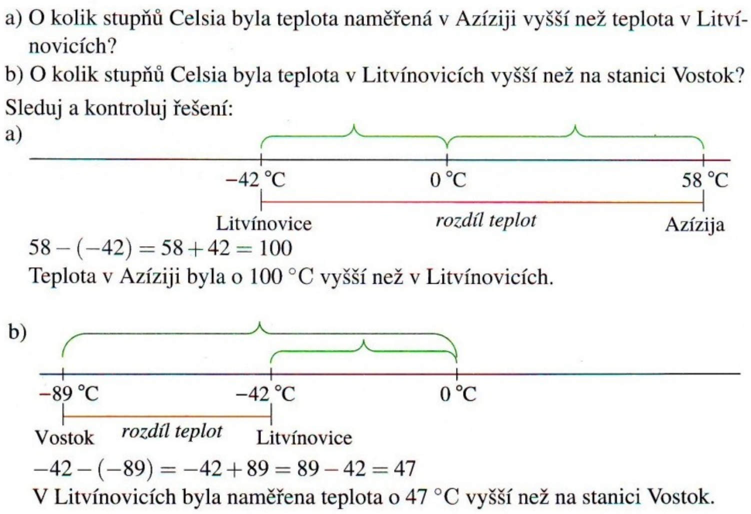
	Fortuna	Odvárko, Kadleček	Fraus	Prometheus
sčítání	X	X	X	X
odčítání	X	X		x
násobení	X		x	
dělení				

V učebnici Fortuna zvolili pro vysvětlování sčítání celých čísel pohyb figurky po číselné ose. Slovní popis pohybu figurky zakreslují na číselné ose a také zapisují číselně. Pro odčítání zvolili model (viz obr. 27), kde vzájemná vzdálenost dvou dívek (po krokování) odpovídá rozdílu dvou čísel. V učebnici Prometheus je sčítání a odčítání celých čísel na číselné ose vysvětlováno také pomocí krokování. To je ukázáno na konkrétních číslech, ale také obecněji. Například u sčítání stojí panáček na čísle *a* a třemi kroky doprava se posune na číslo *a+3.* Není zde však na číselné ose vysvětleno odčítání záporného čísla. Také v učebnici Fraus je na pohybu panáčka ukázáno sčítání celých čísel, ale odčítání ne.



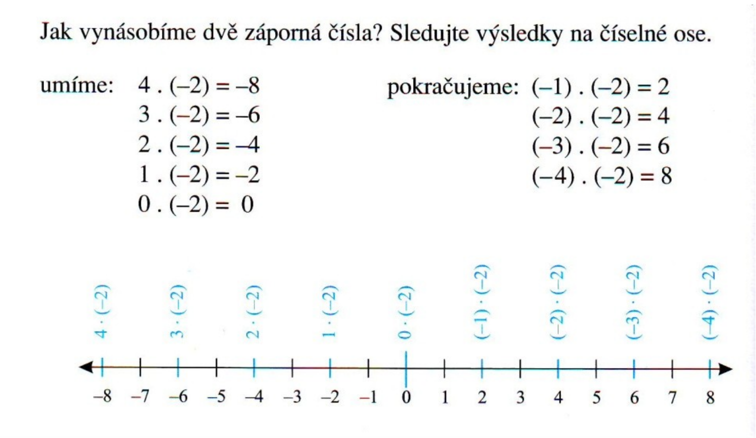
Obr. 27 Odčítání celých čísel (Fortuna, 7. roč., s. 128)

V učebnici Odvárka a Kadlečka je sčítání ukázáno šipkami na číselných osách a odčítání je znázorněno stejným způsobem pro odčítání většího kladného čísla. Pro znázornění odčítání záporného čísla zvolili autoři situaci teplotních rozdílů (viz obr. 28).



Obr. 28 Odčítání celých čísel (Odvárko, Kadleček, 7. roč, 1. díl, s. 63, 64)

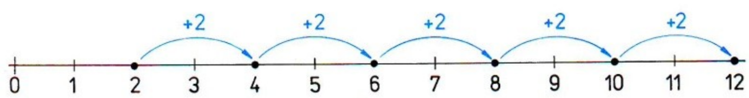
Násobení je ukázáno v učebnici Fortuna i Fraus jako pohyb na číselné ose, kde se dělají například 3 skoky po dvou doleva, což je $3 \cdot (-2)$ ve Fortuně a opakované dva kroky doleva ve Frausovi. Součin dvou záporných celých čísel (obr. 29) je ukázán na číselné ose pouze ve Fortuně, a to ne pohybem, ale vyvozováním pravidla.



Obr. 29 Násobení celých čísel (Fortuna, 7. roč., s. 132)

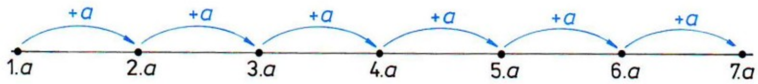
<u>Násobek a dělitel</u>

V učebnici Odvárka a Kadlečka není použita číselná osa u výuky násobku a dělitele, ale u zavedení prvočísel a složených čísel jsou v úvodním příkladu na číselné ose (zobrazené od čísla 1 do čísla 15) vyznačena čísla, která mají alespoň tři různé dělitele. Prometheus zavádí násobek čísla na číselné ose (obr. 30), když ukazuje, jak zobrazíme násobky čísla 2.



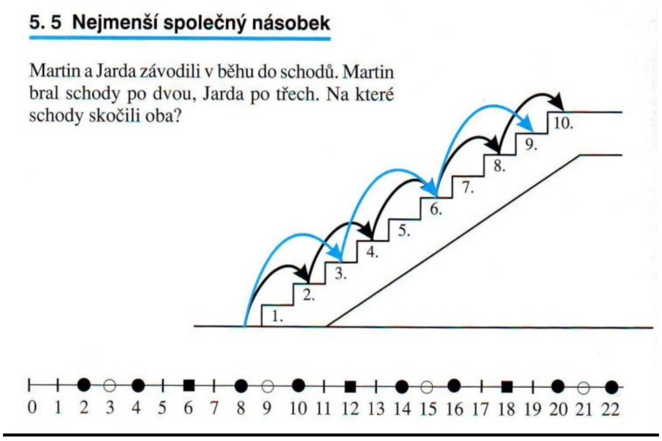
Obr. 30 Násobek čísla 2 (Prometheus, Prima, díl Dělitelnost, s. 9)

Dále pak ukazuje, jak zjistit na číselné ose, zda číslo je násobkem čísla 3, či není, což poté převádí do obecného zápisu (obr. 31).



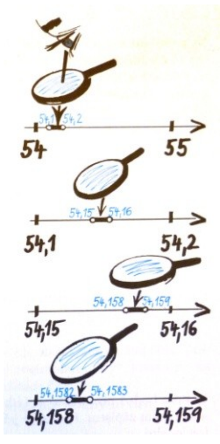
Obr. 31 Násobek čísla *a* (Prometheus, Prima, díl Dělitelnost, s. 10)

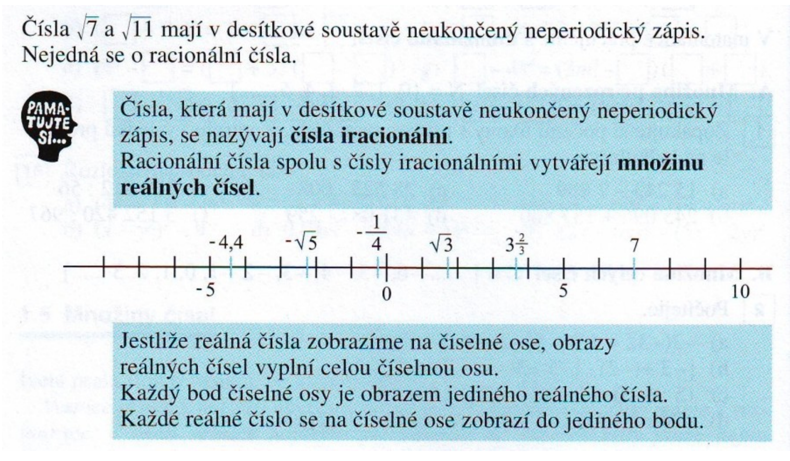
Číselnou osu, jak je vidět na obrázku 32, pro zavedení nejmenšího společného násobku využili autoři učebnice Fortuna.



Obr. 32 Nejmenší společný násobek (Fortuna, 6. roč., s. 146)

Iracionální čísla pojmenovávají učebnice Fortuna a Prometheus, v dalších dvou učebnicích tento pojem nenajdeme. Ostatně ani v RVP ZV se neobjevuje. Fortuna nepoužívá číselnou osu u iracionálních čísel, ale vzápětí na číselné ose zavádí reálná čísla (viz obr. 33b). V učebnici Prometheus je použita číselná osa (ve chvíli, když se vyskytne $\sqrt{2}$) pro zavedení iracionálního čísla. Ukazuje se na číselné ose, že mezi dvěma racionálními čísly lze nalézt číslo, které racionální není, což ilustruje obrázek 33a. Následně se zavedou čísla reálná.





Obr. 33a Iracionální čísla (Prometheus, Sekunda, Výrazy, s. 27)

Obr. 33b Reálná čísla (Fortuna, 9. roč., s. 18)

V učebnicích pro 8. a 9. ročník se číselná osa téměř nevyskytuje. Jednou z výjimek je její zařazení při výuce mocnin a odmocnin (bez zavádění iracionálních čísel) v učebnici Fraus pro 8. ročník. Zde je zařazena úloha, kde si žáci mají vybrat libovolné číslo na číselné ose (je řečeno, že mohou volit i čísla, která nejsou na ose popsána, což podporuje vědomí o spojitosti číselné osy) a vypočítat jeho druhou mocninu. Mají porovnat všechny výsledky a říci, zda je druhá mocnina číslo kladné nebo záporné. (Výběr čísel popsaných na ose zahrnuje různé reprezentanty racionálních čísel.) U odmocnin (druhých a dále třetích) je úloha, kde mají žáci vypočítat odmocniny čísel 1 až 10 a zobrazit je na číselné ose.

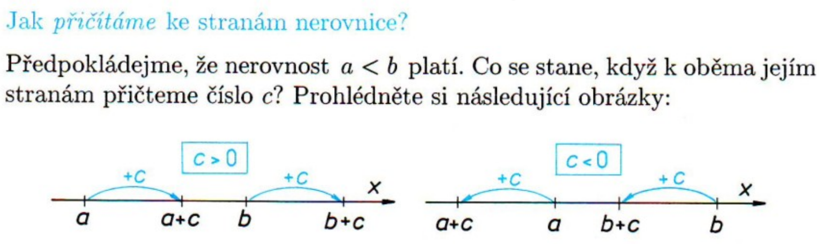
Rovnice, nerovnice (intervaly)

Číselná osa se vyskytuje v různé míře také v kapitolách věnujících se rovnicím, popř. nerovnicím (v RVP ZV se nerovnice nenacházejí). V učebnici Odvárka a Kadlečka se v souvislosti s rovnicemi vyskytuje v 8. ročníku pouze připomínka významu absolutní hodnoty.

V 9. ročníku v učebnici Fraus jsou v kapitole rovnic zařazeny jen dvě procvičující úlohy, jedna je na čtení čísel z osy a druhá na jejich porovnávání.

V gymnaziálních učebnicích je použita číselná osa na připomenutí nerovnosti dvou čísel. V této celkem rozsáhlé kapitole (Nerovnosti) se jiná číselná osa už nevyskytuje. Číselnou osu lze více nalézt až v kapitole Intervaly. Zde je vysvětleno, co je uzavřený interval, pomocí dvou teploměrů. Jeden zobrazuje původní teplotu vody v hrnci a druhý teplotu po ohřevu. Žáci mají na číselné ose znázornit všechny hodnoty, kterých teplota při ohřevu dosáhla. V této kapitole se vyskytuje ještě několik úloh s číselnou osou.

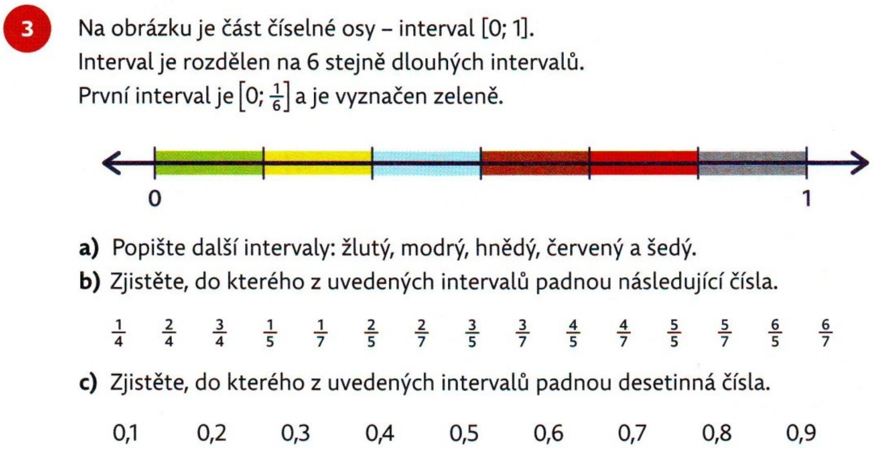
Na číselné ose jsou v učebnici Prometheus popsány také ekvivalentní úpravy nerovnic přičítání (resp. odčítání) stejného čísla k oběma stranám nerovnice, jak je částečně ukázáno na obrázku 34, za nímž následovalo vysvětlení a zbytek důkazu.



Obr. 34 Nerovnice (Prometheus, Sekunda, díl Rovnice a nerovnice, s. 81)

V učebnici Fortuna jsou úlohy na řešení jednoduchých nerovnic typu $a < 5$ v oboru celých čísel. Jak nalézt řešení, je demonstrováno na několika číselných osách.

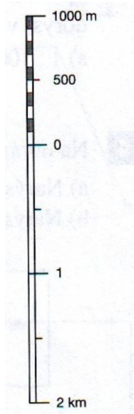
Za účelem (mimo jiné) propedeutiky rovnic je v učebnicích Hejného zařazeno prostředí Schody, tedy pohyb na sémantické číselné ose (H-mat, 2017). Že se tato učebnice zabývá i tématem intervalů, se dá ilustrovat na úloze z obrázku 36, která je v kapitole věnované číselné ose, a také na úloze z obrázku 26.



Obr. 35 Číselná osa (Hejný, díl B, s. 69)

Poměry

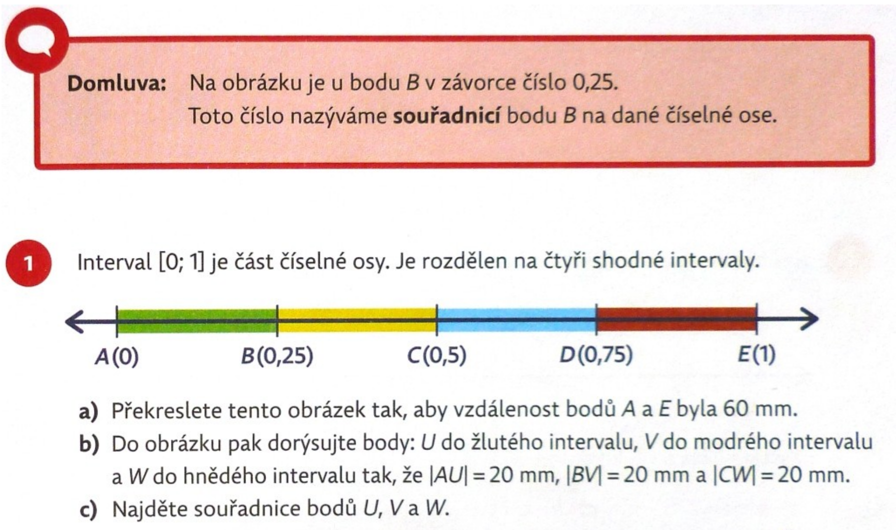
U poměrů se s číselnou osou v učebnicích nesetkáme. Ačkoliv by se dala pro výuku využívat dvojitá číselná osa, jsou například v učebnici Odvárka a Kadlečka pouze úsečky a měřítko mapy, které navíc může žáky mást, protože připomíná číselnou osu, ale kladná čísla jsou s různou jednotkou zobrazena na obě strany od nuly (obr. 35). V učebnicích nakladatelství Prometheus se nachází zobrazení poměrů pouze na úsečce a v učebnici Fortuna se v této souvislosti číselná osa neobjevuje.



Obr. 36 Měřítko mapy (Odvárko, Kadleček, 7. roč., 2. díl, s. 23)

Pravoúhlá soustava souřadnic

Číselná osa je zmíněna i u pravoúhlé soustavy souřadnic. Někde se nachází pouze pojmenování, že *x* a *y* jsou číselné osy (Odvárko a Kadleček), jinde je souřadnému systému věnováno více prostoru včetně opakování práce na číselné ose (Prometheus). V poslední jmenované učebnici je na číselné ose zaváděn pojem souřadnice a tato kapitola věnující se i číselné ose zahrnuje dvě úlohy z matematických olympiád. Pojem souřadnice bodu s následující úlohou na obrázku 37 se nachází také v učebnici Hejného.

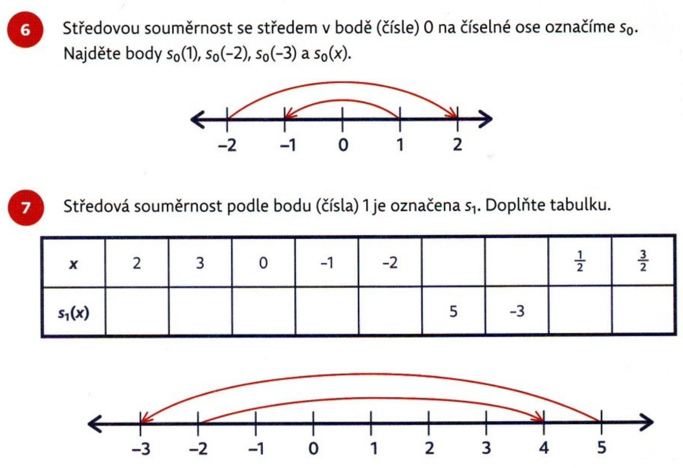


Obr. 37 Číselná osa (Hejný, díl B, s. 55)

Pro dobré pochopení účelu soustavy souřadnic a práce v ní jsou v učebnici Fraus před kapitolou funkce řazeny dvě úlohy na připomenutí práce na číselné ose. V učebnici Prometheus se několikrát slovně odkazuje na číselnou osu při zavádění, hledání a zapisování definičního oboru.

Středová souměrnost

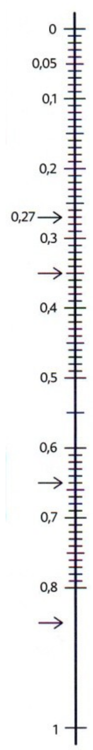
V žádné jiné učebnici než v učebnici Hejného (učebnice B) jsem se nesetkala s použitím číselné osy v souvislosti se středovou souměrností. Je vidět (obr. 38), že se zde pracuje se zobrazením číselné osy jako přímky, na které jsou vyznačeny body, a ne jako se zobrazením obrázku ve středové souměrnosti(či osové, jak se to projevovalo v řešeních žáků, viz oddíl 4.7.1), u něhož by se zobrazilytaké adresy čísel.



x	2	3	0	−1	−2			$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$s_1(x)$						5	−3		

Obr. 38 Středová souměrnost (Hejný, díl B, s. 66)

Stupnice vs. číselná osa a její orientace



Obr. 39 Desetinná čísla (Hejný, díl A, s. 29)

Dále bych zmínila nejednoznačnost učebnic v orientovanosti číselné osy a nejednoznačnost v rozlišení stupnic a číselné osy. Ve všech čtyřech analyzovaných učebnicích je uvedena poučka, že na číselné ose jsou větší čísla vpravo od menších. Učebnice Fortuna jako jediná uvádí poučku pro porovnávání pro vodorovnou i svislou číselnou osu. V učebnici Prometheus jsou před vyslovením této poučky zobrazeny kromě vodorovných také čtyři svislé číselné osy, které jsou pak všechny sjednoceny do vodorovné číselné osy, o které je teprve poučka vyslovena.

V učebnici Hejného jsem poučku o tom, že se vpravo (resp. výše na svislé) číselné ose nacházejí čísla větší než vlevo (resp. níže), nenalezla, z čehož jen v rámci této učebnice nevzniká spor s úlohou obsahující číselnou osu zobrazenou na obrázku 39.

Když se v úloze v učebnici Hejného mluví o stupnici, je u ní napsáno „v případě potřeby stupnici rozšiř“, což odkazuje na omezenost stupnice, jak je charakterizována dříve. Avšak v této úloze není žádná propojenost s reálným světem, což je pro stupnici také charakteristické. Naopak zde i v jiných učebnicích se někdy u čísel číselné osy vyskytují dopsané jednotky veličin, a přesto se nemluví o stupnici. Pojem stupnice se ve čtyřech analyzovaných učebnicích z tabulky 2 vyskytuje pouze ve spojení, kde se to běžně v řeči používá, jako je například stupnice teploměru (tedy, kde je propojení na reálný svět).

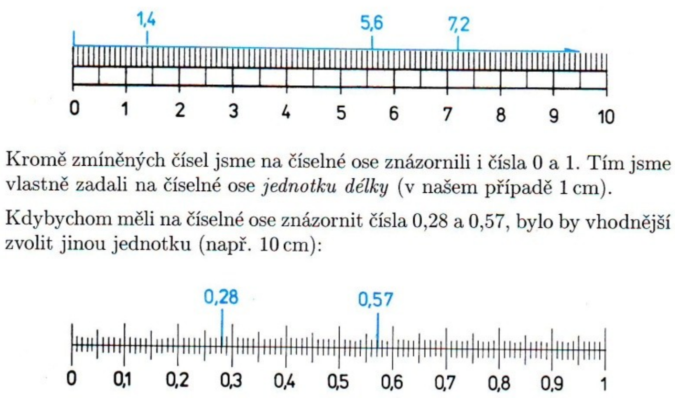
Úlohy a jednotka

I v analyzovaných učebnicích pro 2. stupeň z tabulky 2 se vyskytují typy číselných os a úloh odpovídající těm, které se nacházely v učebnicích pro 5. ročník. Tedy úlohy typu: zaznamenej číslo; kterému číslu odpovídá bod na číselné ose; porovnej čísla. Číselné osy zde už nutně nezačínají nulou, ale až na výjimky (u zlomků) je většina os dělena pravidelně na stejné dílky[22]. Výjimečně se už také vyskytuje úloha, například v učebnicích nakladatelství Fraus a Fortuna, kde žák pracuje s číslem, které je mimo toto pravidelné dělení číselné osy. V učebnicích pro 2. stupeň se s novou látkou zvýšila pestrost zadání úloh, jako je např. zakreslení prováděných operací či řešení nerovnic.

Spíše výjimečně (pokud vůbec) se mezi úlohami učebnic z tabulky 2 objevují takové, které pracují s jednotkami délky a zároveň v nich neodpovídá 1 cm jednomu (či desetině) dílku na číselné ose. Není jich ale více než těch, kde se volí 1 cm jako jednotka, jak je například vidět

[22] Podrobnější popis této vlastnosti je v oddíle 3.2.1.

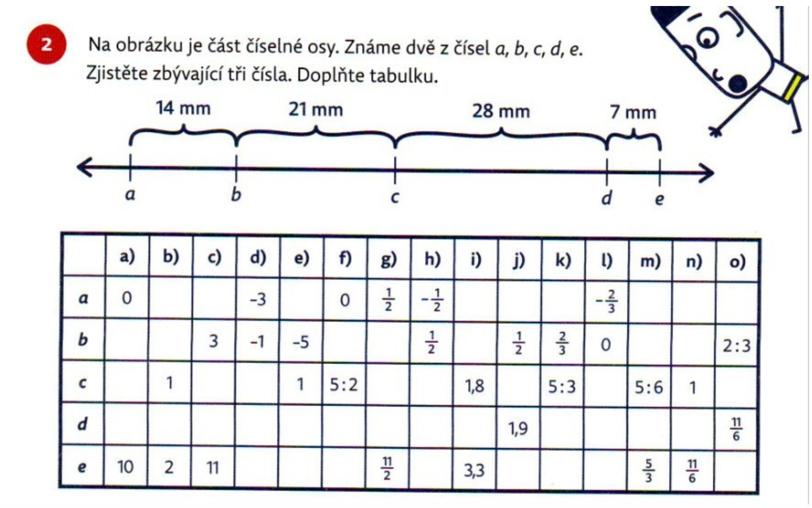
v učebnici Prometheus v komentáři při zavádění zobrazení a porovnávání desetinných čísel (obr. 40).



Obr. 40 Znázorňování a porovnávání desetinných čísel (Prometheus, Prima, díl Úvodní opakování, s. 42)

Jedna ze dvou úloh, které nabourávají možné vytvořené pravidlo, že jeden dílek odpovídá 1 cm, v učebnici Prometheus zní: „Narýsujte vodorovnou číselnou osu a vyznačte na ní libovolný bod, který bude obrazem čísla 8. Vpravo od něho ve vzdálenosti 11,9 cm vyznačte bod, který bude obrazem čísla 9. Najděte a vyznačte na této číselné ose bod, který bude obrazem čísla 0.“ (Prometheus, Prima, *Kladná a záporná čísla*, s. 63)

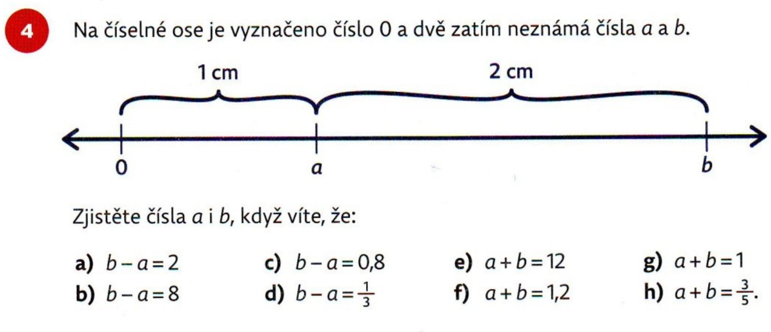
V těchto učebnicích jsou takové úlohy vzácností, kdežto v učebnici Hejného jsou tyto úlohy obvyklé. Dvě z nich jsou na obrázcích 41 a 42. Další taková úloha využívá místo centimetrů palce.


2 Na obrázku je část číselné osy. Známe dvě z čísel *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Zjistěte zbývající tři čísla. Doplňte tabulku.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)	n)	o)
a	0			-3		0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$-\frac{2}{3}$			
b			3	-1	-5			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0			2:3
c		1			1	5:2			1,8		5:3		5:6	1	
d										1,9					$\frac{11}{6}$
e	10	2	11				$\frac{11}{2}$		3,3				$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{6}$	

Obr. 41 Číselná osa (Hejný, díl B, s. 55)

Úloha na obrázku 42 je kromě dříve řečeného zajímavá také tím, že propojuje různé oblasti matematiky. Například obsahuje poměry, neznámé v souvislosti s aditivními operacemi a také zapojuje různé číselné reprezentanty.


4 Na číselné ose je vyznačeno číslo 0 a dvě zatím neznámá čísla a a b.

Zjistěte čísla a i b, když víte, že:

a) $b-a=2$ **b)** $b-a=8$ **c)** $b-a=0{,}8$ **d)** $b-a=\frac{1}{3}$ **e)** $a+b=12$ **f)** $a+b=1{,}2$ **g)** $a+b=1$ **h)** $a+b=\frac{3}{5}$.

Obr. 42 Číselná osa (Hejný, díl B, s. 56.)

3.2.3 Shrnutí

V učebnicích pro 5. ročník z tabulky 1 není příliš využívána číselná osa k zavádění nové látky (nejvíce je využita v učebnicích nakladatelství Fraus). Pokud však číselná osa při zavádění nové látky využita je, ale nenásleduje více úloh, které k jejímu využití nabádají, stojí příklad/ úloha s číselnou osou izolovaně a je pravděpodobné, že žák se s číselnou osou nenaučí pracovat. V učebnicích i pracovních sešitech pro 5. ročník se vyskytuje nízký počet různých typů úloh a celkově málo úloh s číselnými osami, čehož výjimkou je učebnice Hejného, která je v tomto ohledu mnohem pestřejší. Všechny analyzované pracovní sešity a materiály obsahují v poměru k počtu úloh obdobný nebo menší počet úloh s číselnou osou než k nim příslušné učebnice. U žádného pracovního sešitu a materiálu se nedá říci, že by doplňoval učebnici o to, co v ní vzhledem k úlohám s číselnými osami chybí.

O čtyřech učebnicových řadách pro 2. stupeň z tabulky 2 se dá obecně říci, že se ve vyšších dvou ročnících číselná osa téměř nenachází. V učebnicích pro 6. a 7. ročník se vyskytuje nárazově v kapitolách věnovaných především zobrazování a porovnávání čísel celých, desetinných a zlomků. V těchto učebnicových řadách se dá nalézt i několik netypových úloh, ale většina úloh je stejného typu jako v učebnicích pro 5. ročník. V učebnici Hejného je složení typů úloh s číselnou osou stejně jako jejich zadání různorodé. Když se zavádí v učebnicích pro 2. stupeň nová látka, je číselná osa více využívána než v učebnicích pro 5. ročník. Mnohdy však není využit potenciál číselné osy, která je často dána jako ukázka či je formou poučky, což je málo na to, aby se pro žáka stala strukturálním modelem čísel.

4 Výzkumné šetření

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, jak jsou žáci schopni pracovat s obrazy čísel (celých a především pak desetinných a zlomků) na číselné ose, jakých chyb se při tom dopouštějí, a zda lze nalézt odraz výsledků žáků v obsahu učebnic. Konkrétní výzkumné otázky jsou formulovány následovně:

1. Jakých chyb se žáci dopouštějí při práci na číselné ose? Mají tyto chyby spojitost s obsahem učebnic? Je rozdíl v úspěšnosti řešení úloh mezi školami, který by mohl vyplývat také z užívání odlišných učebnic?
2. Existují rozdíly ve schopnosti žáků pracovat na číselné ose se zlomky a desetinnými čísly?

4.1 Sestavení diagnostického testu

Žáci se na 1. stupni setkají s čísly desetinnými, se zlomky a s celými čísly[23]. I na 2. stupni se číselná osa v učebnicích vyskytuje převážně v těchto tématech, proto do výzkumného šetření byly vybrány úlohy z těchto číselných oborů.

Úlohy do testu jsem sestavovala na základě analýzy úloh učebnic pro 5. ročník, úloh z šetření TIMSS a PISA a úloh z testů státních maturit (ilustračních i skutečně zadaných při maturitách). Ze jmenovaných učebnic a šetření jsem některé úlohy, které byly dle popisu v oddíle 3.2 posouzeny jako netypové, do testu převzala, popřípadě jsem úlohy upravila, aby byly co nejméně typové a adekvátní i pro žáky 6. a 7. ročníku. Inspirovala jsem se také některým typovým zadáním úloh, kterému jsem přiřadila číselnou osu netypové úlohy (viz oddíl 4.3).

Typové úlohy, které se vyskytují ve většině učebnic, jsem nevolila proto, aby je žáci neřešili mechanicky, aniž by nad nimi museli přemýšlet, a aby naopak museli použít znalost orientace na číselné ose. Dalším důvodem je, že chyby, kterých se v těchto úlohách žák s větší pravděpodobností dopustí, mohou upozorňovat na to, že nevyužívá číselnou osu jako model, jehož prostřednictvím může získávat další matematické poznatky a zkušenosti, ale že číselná osa a práce na ní je pro něj jen formálním poznatkem.

Mezi hlavní rysy „typovosti“, kterým jsem se vyhýbala při sestavování úloh, patří dělení číselné osy na jednotlivé dílky po jednotce, desetinách či desítkách s popsaným všemi těmito ryskami. Dále jsem vyloučila případy, kdy bylo číslem popsáno více dílků, než je nezbytně nutný počet k řešení úlohy. Také jsem se varovala toho, aby každá číselná osa byla znázorněna od nuly například do čísla 5. Pro některé testové úlohy jsem volila takovou znázorněnou část číselné osy , která neobsahuje vyznačené číslo nula, nebo na níž se obraz čísla nula vůbec nevyskytuje. Dále jsem zařadila úlohy, kde se vyskytují jak desetinná čísla, tak zlomky, protože v učebnicích jsou velmi často číselné osy v dané kapitole zaměřeny jen na konkrétní učivo té dané kapitoly (například desetinná čísla) a už nedochází k propojování s jiným učivem např. se zlomky. Žák, pro kterého je číselná osa formálním poznatkem, se bude obtížněji vyrovnávat s úkolem, ve kterém musí kombinovat různé číselné reprezentanty.

Dalším kritériem sestavování úloh bylo, aby řešení jedné úlohy nenapovídalo (např. volenými čísly, charakterem číselných os) řešení jiné. Textové zadání úloh testu odpovídá typovým zadáním, to je těm, která se v učebnicích vyskytují často, a to z důvodu, aby u žáka nedošlo k problému v řešení úlohy na základě nepochopení, co se po něm chce. Proto jsem se také zcela vyhnula oblastem, jako je např. zaokrouhlování, aritmetický průměr dvou čísel a absolutní hodnota, které jsou s číselnou osou spojeny jen v některých učebnicích.

Od záměru udělat stejný test pro 6. až 9. ročník jsem upustila proto, že žáci se na 2. stupni učí novým poznatkům o číslech desetinných, celých a zlomcích. Proto kdybych vycházela jen z učiva týkajícího se číselné osy, které by měli ovládat žáci na konci 5. ročníku, v 9. ročníku by

[23] Viz oddíl 3.2.1

již tyto úlohy byly příliš snadné a test by ztratil rozlišovací schopnost. Přesto jsem se snažila, aby úlohy v testech pro 6. a 7. ročník odpovídaly typově úlohám v testu pro 8. a 9. ročník. Některé úlohy jsou shodné v obou testech.

Sestavený pilotní test je v příloze 3.

4.2 Pilotní šetření

Pro pilotní šetření jsem využila příležitosti o prázdninách, kdy do jednoho centra volného času přijeli i žáci 2. stupně základních škol a nižších ročníků gymnázia z různých míst České republiky. Bylo tedy možné zadat test všem zúčastněným najednou. Tohoto pilotního šetření se účastnilo 19 žáků, po pěti z 6., 7. a 8. a čtyři žáci z 9. ročníku (nebo odpovídajících ročníků gymnázia). Tito žáci odpovídají běžné populaci.

Během testu měli žáci možnost se přijít individuálně zeptat, pokud něčemu v zadání nerozuměli. Jejich dotazy jsem si zaznamenávala buď jinou psací potřebou přímo do jejich testů na okraj, pokud by se mohl hodit konkrétní kontext testu, nebo jsem si je zaznamenávala k úlohám do svého testu. Žáky jsem upozornila, že je pro mě velmi užitečné, pokud budu moct nahlédnout do jejich způsobu uvažování nad úlohou, a proto ať negumují a popřípadě ať mi klidně do testu napíší nějakou poznámku, abych věděla, kde nad něčím váhali nebo co jim nebylo srozumitelné.

Následně jsem vybrala několik testů, ve kterých mi byl nějaký postup nesrozumitelný či které byly něčím zajímavé, a s jejich autory jsem udělala rozhovor. Ptala jsem se, jak úlohy řešili a proč volili daný postup, a důležité myšlenky jsem si průběžně písemně zaznamenávala. Také někteří mnou nevybraní žáci projevili zájem o to, jak mělo vypadat správné řešení, a tak jsem test prošla i s nimi. Rozhovor měl za cíl ozřejmit, kde žáci viděli problém, čemu konkrétně nerozuměli a jak postupovali při řešení jednotlivých úloh.

Na základě této pilotáže byl test upraven následovně:

- byl doplněn údaj o známce na posledním vysvědčení
- bylo přeformulováno zadání úloh (1 a 5), kde se vyskytovalo sousloví „obrazy čísel“, protože žáci často uváděli: „ty obrazy jsme se neučili, nevím, co to je“
- ve 2. úloze byla smazána číslice popisující obraz čísla 1 na číselné ose a ponecháno/doplněno číslo 2, a to proto, že tato číslice 1 příliš napovídala ke správnému vyčíslení obrazu čísla L
- textové zadání 3. úlohy bylo lépe formulováno
- do testu pro 8. a 9. ročníky byla doplněna lehčí verze úlohy se součtem, kterou mají v testu 6. a 7. ročníky, čímž vzniklo rozdělení třetí úlohy na 3a: znázornění součtu čísel a 3b: znázornění součinu čísel
- ve 3. úloze v obou testech byla zrušena nabídka odpovědí proto, aby byl rozeznatelnější postup žáka a nenaváděla žáka k tipování nabízené odpovědi; u úlohy 3a byl doplněn požadavek na vyjádření výsledku také číselně
- v úloze 3a byla číslice označující obraz čísla 4 smazána a byla doplněna číslice pro obraz čísla 5, protože řešením této úlohy je číslo 4
- v úloze 1 bylo doplněno: „Naznač, jak jsi dospěl k výsledku.“, aby bylo možno lépe nahlédnout do postupu řešení žáka; žádost o zdůvodnění výsledku je také doplněna v testu pro 8. a 9. ročníky v úloze 3b
- ve 2. úloze v testu pro starší dva ročníky byl doplněn požadavek, aby žáci výsledek zapsali jak desetinným číslem, tak zlomkem (k tomu došlo proto, že předchozí ani tato úloha neurčovala, zda pracovat na číselné ose s vyjádřením čísel pomocí zlomků nebo

desetinných čísel, a přesto všichni žáci, až na jeden neúspěšný pokus, tato čísla vyjádřili desetinným číslem)

- ve 4. úloze bylo částečně přeformulováno zadání, místo „Vhodně zvol číselnou osu." bylo napsáno „Vhodně zvol jednotku číselné osy."
- v 5. úloze bylo v zadání nahrazeno desetinné číslo zlomkem; v testu pro 6. a 7. ročník se číslo 0,5 nenahradilo číslem $\frac{1}{2}$, aby nebyly oba zlomky v polovinách celých čísel, ale číslem $\frac{1}{4}$; v testu pro 8. a 9. ročník byla změněna obě čísla, aby po změnách lépe odpovídala úloze v testu pro 6. a 7. ročník; změny proběhly z toho důvodu, že žáci v úlohách, kde se vyskytovala desetinná čísla i zlomky, převáděli vždy zlomek na desetinné číslo a nikdy nepracovali na číselné ose s čísly vyjádřenými zlomkem
- u 6. úlohy bylo do zadání dopsáno: „Jednotku zvol libovolně.", protože se v pilotním šetření vyskytlo více dotazů typu: „V jakém měřítku to máme psát?"

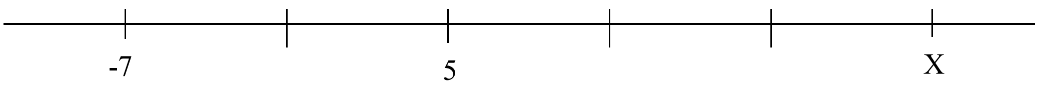
Úloha číslo 1 nebyla vynechána ani pozměněna tak, aby se použila jen přirozená čísla, ačkoliv pět žáků zvláště mladších (čtyři z nich z 6. třídy), k jeho řešení dopisovalo „Nevím." nebo „Neučili jsme se zatím čísla menší než 0.", a to z důvodu, že v RVP ZV je výstupem 5. ročníku: „Žák porozumí významu znaku „–" pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose." (viz oddíl 3.1). V pilotáži se tuto úlohu některým mladším žákům správně vyřešit podařilo.

4.3 Test

Pokud v následujících testových úlohách není popsán nějaký rozdíl mezi testem pro 6. a 7. ročník a testem pro 8. a 9. ročník, týká se daná informace, celá úloha či její část obou dvou testů.

4.3.1 1. testová úloha

Zapiš číslo, kterému odpovídá vyznačený bod *X*. Naznač, jak jsi dospěl k výsledku.



X=

(Výsledek: $X = 23$)

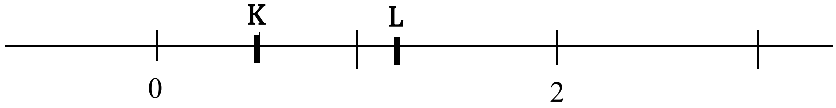
(CERMAT, 2015)

Tato úloha byla převzata ze státních maturit z jarního termínu roku 2015, kde, jak bylo řečeno již výše, byla její úspěšnost řešení 84,5 %.[24] Jako jediná z celého testu obsahuje pouze celá čísla. Zařazena byla především proto, že velikost dílku neodpovídá velikosti jednotky, žádná z rysek neodpovídá obrazu čísla 0 a nejsou popsány všechny rysky. Proto se předpokládá, že se u této úlohy mohou projevit chybné strategie řešení, které budou spočívat v aplikování pravidel, která žák uplatňuje při práce s typovými úlohami (viz oddíl 3.2.1). Jelikož žák po absolvování 1. stupně, jak bylo řečeno výše, umí zobrazit také záporná celá čísla na číselné ose, měl by, i když možná s většími obtížemi než žáci, kteří už probírali operace v oboru celých čísel, umět tuto úlohu řešit.

[24] na základě dotazu na Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT)

4.3.2 2. testová úloha

Kterému číslu nejlépe odpovídá vyznačené číslo *K* a *L*?



$K =$

$L =$

V testu pro 8. a 9. ročník bylo požadováno zapsání výsledku následovně:

Zlomkem:

$K =$

$L =$

Desetinným číslem:

$K =$

$L =$

(Výsledky: $K = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $L = \frac{6}{5} = 1{,}2$)

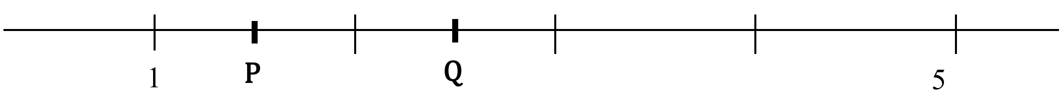
Hlavním záměrem úlohy bylo zjistit, zda žáci budou pracovat se zlomky či desetinnými čísly. Pilotní šetření však, jak bylo řečeno výše, prokázalo jasnou prioritu čísel desetinných, proto byla úloha pro 8. a 9. ročník doplněna a také jako první v pořadí bylo uvedeno vyjádření výsledku zlomkem. V testu pro 6. a 7. jsem nechala volnost ve způsobu vyjádření výsledku, protože žáci mají zcela probrané učivo zlomků až po 7. ročníku. Tato úloha sleduje, zda jsou žáci schopni správně přečíst čísla vyznačená na číselné ose, přestože nemají popsány všechny rysky příslušnými přirozenými čísly a také číselná osa není jemněji dělena tak, aby vyznačenému obrazu čísla odpovídala jedna z rysek pravidelného dělení osy. Volila jsem záměrně část číselné osy zobrazující nižší kladná čísla, a to z důvodu, že zlomky se zobrazují převážně na blízkém kladném okolí nuly. Jedno z čísel jsem volila v intervalu (0; 1), protože na tomto intervalu se zobrazují zlomky v učebnicích, a jeho hodnotu $\frac{1}{2}$, respektive 0,5, protože toto číslo v obou podobách žáci vzhledem k jeho brzkému výskytu v učebnicích dobře znají. Druhé číslo bylo voleno větší než 1, protože takové zlomky se na číselné ose v analyzovaných učebnicích (krom učebnic Hejného) téměř nevyskytují. Bylo zvoleno číslo 1,2, respektive $\frac{6}{5}$, protože žák má možnost dělit interval (1; 2) více způsoby: buď na deset, nebo na pět dílků. Také kdyby bylo zvoleno číslo 1,1, mohl by ke správnému výsledku dojít i žák, který by se dopustil chyby, když by předpokládal, že vyznačené menší dílky jsou vždy o řád menší (v učebnicích tomu tak bývá), a k jedničce by přidal jednu desetinu.

4.3.3 3. testová úloha

V testu pro 6. a 7. ročník byla ve 3. úloze uvedena pouze úloha zde označená jako 3a, týkající se součtu čísel. V testu pro 8. a 9. ročník byla 3. úloha rozdělena na a, b. Za úlohou a, která byla stejná pro oba testy, následovala úloha b týkající se součinu. Ta byla pouze v testu pro 8. a 9. ročník.

3a Na číselné ose jsou vyznačena čísla P a Q.

<u>Umísti na číselnou osu</u> číslo *N*, pro které platí: $N = P + Q$ <u>Vyjádři ho také číselně</u>.

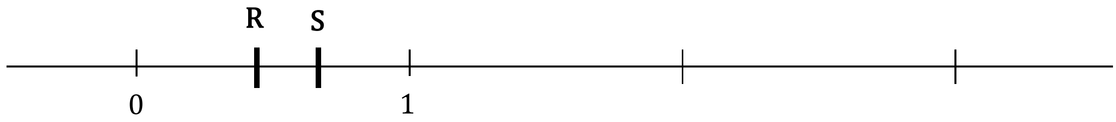


$N =$

(Výsledek: $N = 4$. Protože čísla P a Q jsou pouze reprezentanty určitých čísel, budu za správné řešení považovat i součet hodnot jejichž vzdálenost od P resp. Q je menší než $\pm 0{,}1$.)

3b Na číselné ose jsou vyznačena čísla R a S.

Umísti na číselnou osu číslo T, pro které platí: $T = R \cdot S$



Zdůvodni jeho umístění:

(IEA, 2013)

(Výsledek: T se nachází mezi číslem 0 a R, protože násobíme-li libovolné číslo (zde R) číslem menším než jedna, toto číslo se zmenšuje, z čehož díky komutativitě násobení plyne, že i číslo S po vynásobení číslem R bude mezi číslem 0 a R.)

Jako první byla vybrána úloha 3b, která byla převzata z šetření TIMSS (odtajněna 2011) a byla upravena odstraněním nabídky možností. Ze zadání byla dále odstraněna informace, že T a R jsou zlomky. Protože byla tato úloha vyhodnocena pro 6. a 7. ročník jako náročná, byla podle ní vytvořena úloha 3a, kde se místo součinu užívá součet dvou čísel, který se občas na číselné ose v učebnicích vyskytuje. Nakonec byla úloha 3a dodána i do testu pro 8. a 9. ročník. Její zařazení do obou testů umožňuje porovnání řešení žáků všech ročníků. Číselná osa byla volena tak, aby se na ní nenacházela 0. Obě čísla P a Q byla volena mimo pravidelně vyznačené rysky, ale zároveň ne jako příliš obtížná. Cílem této úlohy bylo ověření žákovy orientace i na číselné ose, která je specifická tím, že nezačíná 0 a že rysky vyznačených bodů spolu s okolními ryskami na části osy jsou sice pravidelné, ale dvakrát hustší než rysky na zbytku číselné osy. Druhým cílem je zakreslit na číselnou osu výsledek součtu, čímž se omezuje soustředěnost žáka na úkony čtení čísel z osy a jejich zapisování na ni. V této úloze se dá sledovat, jakým způsobem žák operaci provádí.

Násobení, tedy úloha 3b, je na číselné ose pro žáky obtížnější. Úloha sleduje řešitelské strategie žáka při operaci na číselné ose. Žák má možnost volit zlomky či desetinná čísla pro vyčíslení a následné vynásobení čísel či výsledek na základě poznatku o součinu dvou čísel menších než 1 odhadnout nebo součin řešit znázorněním na číselné ose. Konkrétně znázornění součinu dvou čísel menších než 1 jsem však v analyzovaných učebnicích nenalezla, přestože součin jako takový se v nich nachází.

4.3.4 4. testová úloha

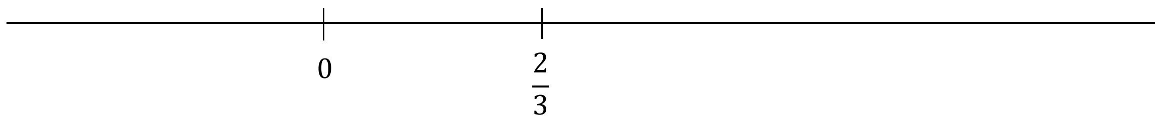
Zaznamenej na číselné ose čísla: $\frac{2}{5}$; $0{,}2$; $\frac{17}{4}$; $1{,}75$. Vhodně zvol jednotku číselné osy.

V testu pro 8. a 9. ročník byla čísla v zadání úlohy následující: $-\frac{2}{5}$; $1{,}75$; $\frac{17}{4}$; $-0{,}2$. Tedy některá jsou změněna na záporná a je změněno jejich pořadí, aby nebyla nejdříve kladná a pak až záporná a aby první dvě nebyla uspořádána vzestupně.

V učebnicích se v úlohách vyžaduje zapsání čísel na číselnou osu, ale nedochází ke kombinování čísel desetinných a zlomků. V učebnicích je také v některých úlohách žák vyzván ke kontrole zakreslením čísel na číselnou osu (například u porovnávání čísel), která není připravena, ale není to hlavním účelem úlohy, spíše tak má žák učinit v případě potřeby. Obdobnou úlohu jsem našla v jedné z učebnic Hejného (viz oddíl 3.2). Velikost jednoho ze zlomků v zadání je větší než 4, což se v učebnicích nevyskytuje. Pokud ale žák umí zobrazit zlomek na číselné ose, nemělo by mu dělat problém zobrazit jakýkoliv. Zobrazení zvlášť zlomků a zvlášť desetinných čísel na jednu číselnou osu se dá udělat, aniž by žák musel umět převádět mezi sebou desetinná čísla a zlomky. To se v učebnicích pro 2. stupeň procvičuje mnohem více, avšak zde je to práce navíc. V této úloze žák prokazuje schopnost zvolit pro zaznamenání všech čísel správnou část číselné osy, a tudíž vhodně zvolit jednotku. Je to tedy opačný proces, než na který je žák (dle učebnic) zvyklý. Tam nejdříve zvolí jednotku (nebo je mu dána), narýsuje část osy a potom zakresluje čísla, která se mu vždy na jeho část osy vejdou.

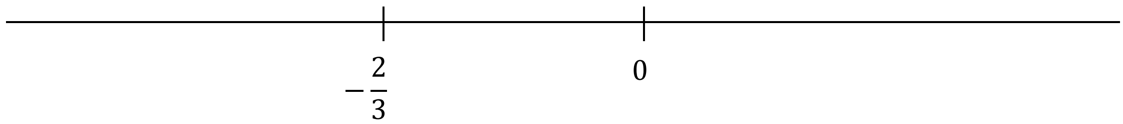
4.3.5 5. testová úloha

Vyznač na číselné ose čísla: $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$



V 8. a 9 ročníku byla pro tuto úlohu použita čísla opačná k číslům zvoleným pro test 6. a 7. ročníku.

Vyznač na číselné ose čísla: $-\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}$



Úloha je zaměřena na zjištění schopnosti žáka pracovat na číselné ose se zlomky. Úloha je volena tak, aby bylo pro žáka nevýhodné převádět zlomky na desetinná čísla a byl nucen pracovat se zlomky. Tato úloha je neobvyklá tím, že žák nezná jednotku. Jeden ze zlomků je opět volen tak, aby byl v absolutní hodnotě větší než 1.

4.3.6 6. testová úloha

Porovnej čísla a všechna vyznač na číselné ose. Jednotku zvol libovolně.

$\frac{1}{2}$ $\square$ 0,5

0,8 $\square$ $\frac{4}{3}$

Text zadání úlohy v testu pro 8. a 9. ročník byl stejný jako pro 6. a 7. ročník. Zadání se však lišilo v zadaných číslech, která zde byla také záporná.

$-\frac{2}{3}$ $\square$ $-0{,}6$

$0{,}75$ $\square$ $\frac{45}{60}$

(Výsledky: 6. a 7. ročník: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $0{,}8 < \frac{4}{3}$

8. a 9. ročník: $-\frac{2}{3} < -0{,}6$; $0{,}75 = \frac{45}{60}$)

V úloze se opět kombinují desetinná čísla a zlomky. Je výhodné čísla na číselné ose zobrazit pro správné zapsání nerovností a také proto, aby se žák nespletl v porovnávání především u záporných čísel. Úloha zkoumá, jak žák využívá pro porovnávání číselnou osu, jestli zaznamenání čísel na ní je něco, co dělá nezávisle na výsledku porovnávání, či je to pro něj kontrola výsledku a nebo výsledek z číselné osy vyvozuje. To nepůjde pravděpodobně rozlišit ze správných řešení (i když i tam může být znát postup), ale spíše z chybných žákových řešení. Žáci 6. a 7. ročníku mají v testu snazší čísla k porovnávání než žáci 8. a 9. ročníku. Vždy jedna dvojice čísel si je rovna, což je relace, která se v učebnicích často vyjadřuje pomocí číselné osy.

Ze všech úloh, kromě první, lze získat informaci o schopnosti žáka a jeho preferenci při práci se zlomky či desetinnými čísly na číselné ose.

4.4 Charakteristika respondentů

Výzkumné šetření bylo provedeno na dvou pražských školách, které budu označovat pseudonymem ZŠ Modrá a ZŠ Zelená. Testování se zúčastnila z každého ročníku jedna třída, s výjimkou 9. ročníku ZŠ Zelená (viz tab. 4). Obě školy byly vybrány jednak na základě dostupnosti a jednak rozdílnosti přístupu k výuce, od kterého se odvíjí i používání odlišných učebnic.

Na ZŠ Modrá se učí v 5. ročníku podle řad učebnic Alter. Na druhém stupni mají žáci učebnice Jany Coufalové a kol. z nakladatelství Fortuna a učitelé mají k dispozici elektronickou učebnici Fraus. Učebnice se používají obě.

Na ZŠ Zelená je na prvním stupni výuka vedena Hejného metodou a jsou používány jeho učebnice. Na druhém stupni mají žáci také učebnice Hejného v 6. a 7. ročníku, ale od výuky touto metodou učitelé upustili. V 8. ročníku žáci svou učebnici nemají. Učitelé mají k dispozici také elektronickou učebnici Fraus.

Tabulka 4: Počty testovaných žáků

škola:	ZŠ Modrá	ZŠ Zelená
6. ročník	19 žáků	27 žáků
7. ročník	20 žáků	26 žáků
8. ročník	22 žáků	23 žáků
9. ročník	19 žáků	výzkum neumožněn

Žáci, kteří mají individuální studijní plán, test neodevzdávali a nejsou ani zahrnuti do počtu žáků v jednotlivých třídách.

Jako doplňkovou metodu jsem použila rozhovory s žáky. Pro ně jsem vybírala žáky ve spolupráci s jejich vyučujícími. Celý proces výběru je popsán v oddíle 4.5. Nakonec jsem provedla po jednom rozhovoru s žáky 6. až 9. ročníku ZŠ Modrá a 7. a 8. ročníku ZŠ Zelená. V 6. ročníku ZŠ Zelená byly provedeny dva rozhovory.

4.5 Průběh šetření

Test jsem v každé třídě zadávala osobně (vždy v dopoledních vyučovacích hodinách). Požádala jsem žáky, aby v testu negumovali a nezačmárávali své postupy, protože na těch mi nejvíce záleží. Vyzvala jsem je, aby mi klidně do testu napsali komentář, pokud budou chtít něco upřesnit, odůvodnit nebo vyjádřit svou nejistotu či jistotu ohledně výsledku. Dále jsem jim zdůraznila, že je pro mě důležité, aby žádnou úlohu nevynechali. Nebylo řečeno, jak dlouho na test mají, aby nepracovali v časové tísni.

Žáci testy odevzdávali průběžně. Některé jsem upozornila na neřešenou úlohu a žák si buď test vzal zpět s tím, že to ještě zkusí nějak vyřešit, nebo mi ho nechal, že sice zadání chápe, ale vážně vůbec neví, jak na to. Když mi odevzdala test většina žáků zhruba po 25 minutách, měla jsem stranou dáno několik testů žáků, které mi učitel k rozhovoru předem doporučil, a těch, s kterými bych ráda provedla rozhovor na základě obsahu jejich testů. Při prvních rozhovorech na ZŠ Modrá s žáky, které mi k rozhovoru doporučil učitel, se však ukázalo, že je důležitější, aby si žák sám chtěl nad testem povídat, než že se učiteli zdá jako vhodný adept. Pro některé žáky bylo například velmi těžké srozumitelně popsat, jak úlohu řešili. Samotný výběr tedy probíhal během psaní testu na základě prohlížení průběžně odevzdávaných testů, (ne)doporučení učitele a také ochotě žáků rozhovor poskytnout.

Ve školách jsem dostala čas pro rozhovory se žáky nad testem vždy do konce vyučovací hodiny, popř. následující přestávky po napsání testu, tedy cca 20 min. Pro kvalitnější rozhovor, který by šel více do hloubky problému, proto nebyl dostatek času. Mou snahou bylo pochopit, jak žáci nad úlohami přemýšleli. Rozhovory vždy probíhaly v přilehlých kabinetech, proto zbylých cca 5 testů, které žáci ve třídách dopisovali, od nich převzal jejich učitel.

Rozhovory spolu s mým i žákovým dokreslováním a dopisováním do testů stejně jako vše, co žák v testu ukazoval, bylo zaznamenáváno na videokameru. V rámci rozhovorů došlo ke dvěma odlišnostem. Ačkoliv se rozhovor žáka 8. ročníku ze ZŠ Zelená zaznamenával, po jeho proběhnutí jsem zjistila, že se záznam neuložil, a proto jsem si jeho průběh ihned zaznamenala do žákova testu. Pokud se tedy na něj budu odkazovat, nejsou použitá slova zcela autentická, ale jejich význam zůstal zachován. Druhou odlišností je rozhovor současně se dvěma žákyněmi také na ZŠ Zelená, kde jsem se na rozhovor domluvila s jednou a druhá za námi vzápětí doběhla, že ji poslala paní učitelka. Žákyně měly většinou chybně řešené každá jiné úlohy, proto jsem hovor s nimi střídala. Pokud měly řešení podobně chybné obě, tak jsem se varovala toho, aby jedna svou odpovědí napověděla druhé. Pokud se tak stalo, druhé žákyně jsem se neptala a dořešila jsem to jen s jednou.

4.6 Analýza dat

Rozhovory byly přepsány a rozděleny po jednotlivých úlohách. Řešení úloh z testů byla (po jednotlivých úlohách) seskupena na základě společných znaků řešitelských strategií žáka. K nim byly přiřazeny také rozhovory žáků, jejichž testy poukazovaly na podobný či shodný řešitelský postup žáka. V některých řešeních žáků se objevovalo více druhů řešitelských strategií, proto byla začleněna do obou skupin, kde v každé byl využit jiný jev v řešení. Zároveň bylo zachováno rozdělení testů po jednotlivých školách a ročnících. V testech byly také hledány souvislosti dlouhodobých žákových výsledků v matematice (známka na vysvědčení) s úspěšností žáka v řešení úloh.

4.7 Výsledky výzkumného šetření

Pro níže uvedené části rozhovorů budu využívat zkratku T pro tazatele a Ž pro žáka. V některých rozhovorech nemusí zcela odpovídat použitá terminologie terminologii mé práce, protože žák někdy používá například pojem dílek k vyjádření jiného obsahu.

4.7.1 Vyhodnocení 1. úlohy

Úspěšnost řešení v jednotlivých ročnících a školách uvádím v tabulce 5.[25]

Tabulka 5: Úspěšnost žáků v řešení 1. úlohy

škola:	ZŠ Modrá	ZŠ Zelená	celkově v ročníku
6. ročník	(4 z 19) tj. 21,1 %	(18 z 27) tj. 66,7 %	47,8 %
7. ročník	(6 z 20) tj. 30,0 %	(18 z 26) tj. 69,2 %	52,2 %
8. ročník	(7 z 22) tj. 31,8 %	(12 z 23) tj. 52,2 %	42,2 %
9. ročník	(9 z 19) tj. 47,4 %	výzkum neumožněn	-
celkově na škole	32,5 %	63,2 %	

Samozřejmě ve výzkumu nelze odstínit vliv vyučujících, jejich osobní styl vyučování a charakteristiky jednotlivých žáků, ale žáci, kteří se učili podle Hejného učebnic a také Hejného metodou na 1. stupni, byli v řešení této úlohy výrazně úspěšnější než žáci, kteří se učili v 5. ročníku podle učebnic Alter.
Podíváme-li se na výsledky v průběhu studia, tak na ZŠ Modrá je zřejmý nárůst úspěšnosti se zvyšujícím se ročníkem. Na ZŠ Zelená dosáhli žáci vysoké úspěšnosti řešení již v 6. ročníku. V 7. ročníku se úspěšnost ještě mírně zvyšuje, ale v 8. ročníku je o něco nižší než v obou předešlých ročnících. To může být způsobeno tím, že žáci v 6. a 7. ročníku ještě používají učebnice Hejného, kdežto v 8. se už nepoužívají. Je samozřejmě nutné si uvědomit, že nebyl sledován vývoj jedné třídy, ale nezávislé třídy s různou historií a s různým složením žáků. Přesto je nutné si povšimnout, že úspěšnost na ZŠ Zelená je v každém ročníku vyšší než úspěšnost v jakémkoliv ročníku na ZŠ Modrá.

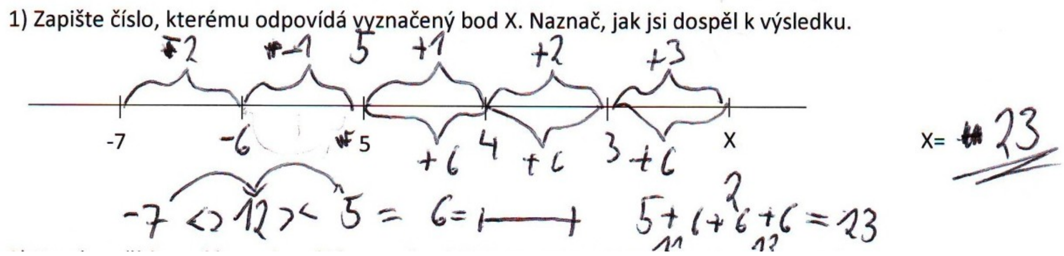
Nyní se podíváme na některé postupy řešení 1. úlohy. K vyčíslení daného bodu na číselné ose v této úloze žáci volili různé strategie řešení, v nichž se odráží jejich schopnost pracovat na číselné ose. Až na některé výjimky se konkrétní strategie řešení vyskytovala zpravidla u více žáků. Převážně těmto se budu věnovat, protože ukazují na chyby při práci s číselnou osou. Zmíním ale i zajímavé, i když třeba méně početně zastoupené, jevy.

Postup vedoucí ke správnému řešení

Žáci, kteří při řešení postupovali správně, volili převážně dva typy strategií. Značná část úspěšných řešitelů nejprve zjistila, jaký je rozdíl mezi čísly -7 a 5, vydělila ho dvěma, aby zjistila, jak velký je jeden vyznačený dílek. Poté tito žáci přičítali k předtištěným číslům za každý vyznačený dílek plus šest až se dostali k X. Druhý nejpoužívanější postup vypadal tak, že žák zjistil rozdíl mezi čísly -7 a 5, poté k číslu 5 přičetl tento rozdíl (12) a pak ještě polovinu (6). Nebo vypočítali $3 \cdot 6 = 18$ a tento výsledek přičetli k číslu 5. V těchto řešeních se někdy vyskytuje škrtnutý či neúspěšný pokus vyčíslit rysku v polovině mezi čísly -7 a 5. Několik žáků zvolilo ještě jinou strategii a doplňovalo rysky pro každé přirozené číslo, až se dostali k číslu 23 (X).

Na obrázku 43 je uveden příklad řešení jednoho žáka, který volil nejprve špatné postupy. Na základě toho, že byl v jisté chvíli jeho špatný postup v nesouladu s jeho znalostmi číselné osy, autokorekcí dospěl k správnému výsledku.

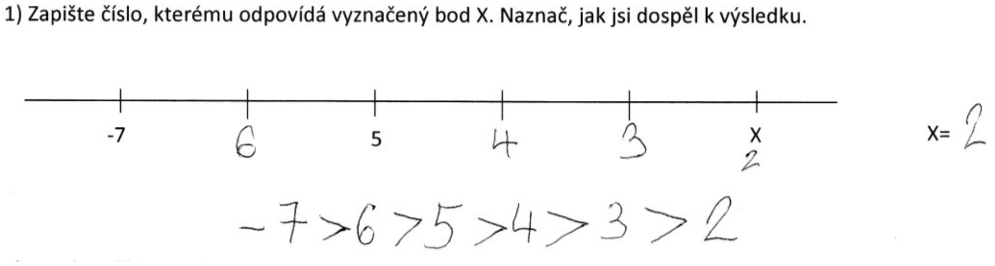
[25] Je možné ho porovnat s úspěšností žáků v této úloze u maturitní zkoušky, která byla 84,5 %. (oddíl. 4.3.1).



Obr. 43 Řešení 1. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Ignorování zápornosti čísla sedm

V tomto případě žák nerozlišoval záporná a kladná čísla a pokračoval řadou čísel v absolutní hodnotě klesajících (viz obr. 44). Výsledek pak byl 2. Mohlo by se říci, že žáci ještě v 6. ročníku nemají dostatečně probraná záporná čísla (podle RVP mají žáci již umět zapisovat záporná čísla na číselnou osu), avšak tato chyba se v řešeních žáků nacházela napříč všemi ročníky.



Obr. 44 Řešení 1. úlohy žáka 6. roč. (ZŠ Modrá)

Tento způsob řešení komentovala v rozhovoru žákyně 8. ročníku ZŠ Modrá:

> Ž: No, já jsem, jakoby, to, jakoby, dělala plus 6 a potom jsem dělala 5, 4, 3 a dvojka mi vyšla.

Na dotaz, proč plus 6, odpověděla: „Protože tady je ta plus pětka, tak jakoby jsem –7 úplně ňák vynechala." A dál se vyjadřuje, že „tu mínus sedmičku nebrala v úvahu, protože pak neví, jak to vypočítat."

Obdobně reagovala žákyně 6. ročníku ZŠ Zelená:

> Ž: No, jako, že jsem si řekla, že tady je čtyřka, tady je trojka a tady bude dvojka.
>
> T: A to, že tady je mínus sedmička?
>
> Ž: No, to jsem neviděla.
>
> T: Tu jsi jako ignorovala?
>
> Ž: No.

Jiní od čísla –7 pokračovali číslem –6 a po číslu 5 již kladnými čísly. Někteří si všimli, že nemohou přecházet plynule z kladných do záporných čísel, ale vyřešili to tak, že dopsali k číslu 5 mínus a vyšlo jim X mínus dva. Jeden žák 8. ročníku dokonce střídal kladná a záporná čísla, psal po čísle –7 čísla: 6, 5, 4, –3, 2.

Silné lpění na následnosti čísel vyznačených na ose, dokonce silnější než znalosti o porovnávání čísel, dokazuje i rozhovor s žákyní 6. ročníku ZŠ Modrá. Rozhovor obsahuje i zajímavý způsob odůvodnění postupu žákyně a upozornění na nejednoznačné vnímání orientace číselné osy, které se v učebnicích někde nachází, ale rozšířené příliš není.

T: Jak jsi tady přišla na tu dvojku? Koukám, že tady máš 6, 5, 4, 3, že sis to označovala. A tenhle výpočet ($14 - 7 = 7$) znamená co?

Ž: No, já vlastně jsem, vlastně jsem odečetla $14 - 7$, protože tady je mínus sedm, (Ukazuje mínus sedmičku na ose.) a pak je tady 5 a 6…, to vycházelo, že $14 - 7$ je 7 a pak 6, 5, 4, 3 a to X je dvojka, protože tam je trojka.

T: A tu čtrnáctku, na tu jsi přišla kde? To je…?

Ž: No, to jsem vlastně jenom…, protože žádné číslo by mi asi ještě nemohlo vycházet, třeba $13 - 7$, to by bylo pět a to už je tady, tak…

T: Jo takhle, že sis řekla, že X by mohlo být 14, tak jsi od něj odečetla tu mínus sedmičku, protože je tady, a podle toho jsi zjišťovala, čemu by se mohla rovnat ta…, že to je 2. No počkej, to ti vyšla sedmička. Tak když ti vyšla sedmička, tak co jsi z toho zjistila, že ti vyšlo číslo 7?

Ž: No, že prostě tady je sedmička (Ukazuje mínus sedmičku.) $14 - 7$ je 7 a tady je vlastně šestka (Ukazuje.), pětka…A takhle jsem to prostě, že když jsem to prostě vynásobila 7krát 2, tak mi zase vycházelo 14. A $14 : 7$ je 7 (T: Je dva.) a takhle je to vlastně dva.

[…]

T: No a kde by tady byla nula na té číselné ose?

Ž: No tady někde. (Ukazuje vpravo za X.)

T: Tady někde?

Ž: (Žák tazatele opravuje.) No, tady by byla jednička někde a tady by byla nula. (Pokračuje vpravo za X.)

T: Tady by byla jednička, jo jako 3, 2, pak by bylo jedna a pak nula. (Žákyně souhlasí.) A poznáš, víš, jak se určuje na číselné ose, které číslo je větší a které je menší?

Ž: (Přemýšlí.) Že ty větší jsou na začátku? To nechci říct jakoby špatně, ale …

T: To nevadí, řekni, jak ty bys to dělala, jak bys poznala na číselné ose, které číslo je větší a které menší.

Ž: Jakoby tady třeba? (Ukazuje na osu v první úloze.) Nebo tady? (Ukazuje na číselnou osu ve třetí úloze.)

T: No, to je jedno, na které číselné ose. Jakou si vybereš.

Ž: Jakoby, že nejčastěji jsou na začátku největší čísla nebo na konci, tak… já nevím, jak to vysvětlit.

Dále tazatelka vedle kreslí číselnou osu, vyznačuje na ní 0 a kreslí rysky na číselnou osu, které nepopisuje a nechává je s odůvodněním porovnávat žákyni, která to s občasným zaváháním dělá tak, jak je běžné.

T: To znamená dokázala bys říct, která čísla jsou větší vždycky? Na takovéhle číselné ose?

Ž: Asi jo. No podle toho, jaká to bude číselná osa. Když to bude jakoby takhle (Ukazuje na osu ve čtvrté úloze.) nebo třeba takhle (Ukazuje na osu v první úloze.), tak bych vlastně hnedka zjistila, že tohle (Ukazuje na začátek osy.) je jakoby větší. Kdyby tohle (Ukazuje na teď nakreslenou osu.), kdyby tady byla třeba mínus jedna a tady jedna (Ukazuje správně každou na jiné straně od nuly.), tak bych si prostě zjistila, že to je tam (Ukazuje doprava.).

T: Takže na téhle číselné ose jsi řekla, že tohle bude vždycky větší než třeba tohle. (Ukazuje dvě čísla.) A je nějaká číselná osa, na které by to neplatilo? Třeba načrtla bys mi nějakou nebo mi tady ukázala nějakou, na které to neplatí?

Tazatelka se snaží dovést žákyni k tomu, že to platí na každé číselné ose na základě toho, že to tak žákyně na načrtnuté číselné ose, kde byla popsána pouze ryska s číslem 0, asi intuitivně dělala správně.

Ž: No, třeba to může být i naopak, že kdyby tady byla třeba jedna (ukazuje nalevo od nuly), třeba 5, 4, 3, 2, 1 (Jede zleva k nule.) a naopak mínus (Ukazuje napravo.).

T: [...] Dobře, ale v tom případě tady, když tady máš mínus sedmičku, tady máš nulu a tady máš třeba šestku (Čísla kroužkuje.). Není tam něco divného na tom?

Ž: No jo, je. Takhle no, že no, že tohle je jakoby asi, no… že tohle by byla asi jako 0 (Ukazuje na 1.), tohle by bylo −1 (Ukazuje na *X*.), tohle −2; −3; −4 (Ukazuje na vytištěné číslo 5.); −5; −6.

T: No, ale když tady máme pětku kladnou dopředu danou. Může být ta nula tady? Když máme tady 5 a tady −7 už danou? Tady je −7 a tady 5.

Ž: No, tak nula by mohla být… (Dlouho přemýšlí.)

T: Tady jsme měli kladná čísla (Ukazuje na nakreslené ose.), na druhou stranu nalevo jsme měli záporná a mezi tím to oddělovala nula. A když tady máme kladnou pětku a zápornou −7? Tak, kde se zhruba bude nacházet ta nula?

Ž: Tady někde, uprostřed. (Krouží nad prostředkem intervalu 5 až −7.).

Dále dojde k rozdělení vyznačených dílků na šest menších odpovídajících celým číslům a vyznačení rysky mezi čísly−7 a 5 číslem −1.

T: Tak, a jak bychom teďko přišli na to, čemu se bude rovnat to *X*?

Ž: Takže 5, 6, 7, 8. (Ukazuje předtištěné rysky od čísla 5 směrem k *X*.)

T: Ale to bychom museli mít tady čtyřku, ne? Aby to jelo 4, 5, 6, 7, ale tady máme mínus jedničku.

Ž: Tak budeme počítat tady, jakoby tady… (Dělá dál za číslo 5 mezi natištěné rysky šest dílků.)

Žák dojde k výsledku a uzavírá svou původní představou.

Ž: Já jsem to vlastně pochopila, že nějaké číslo mínus sedm, pak mi vyjde …sedm, pak počítám vlastně, 6, 5, 4…2 a tak.

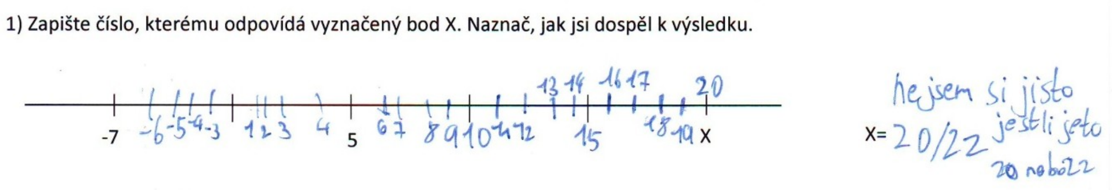
Tento způsob uvažování žákyně i zmíněných žáků naznačuje, že jsou zvyklí, že vyznačené rysky na číselné ose určují čísla bezprostředně po sobě následující ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nebo např. desetinná čísla s jedním desetinným místem). Tuto zkušenost, které odpovídá typově většina úloh v učebnicích, se žáci snažili uplatnit i na tuto číselnou osu. V každé učebnici (kromě analyzovaných učebnic Hejného) se vyskytuje poučka, že se větší čísla na ose vyskytují více vpravo. Ta se však nestala žákům vlastní natolik, aby přebila zkušenost s následností čísel u jednotlivých rysek na ose.

Do této kategorie bych ještě zařadila chybu, kde žák označil rysku mezi záporným a kladným číslem nulou a od čísla 5 doprava pokračoval vzestupně přirozenými čísly 6, 7, 8, aniž by si uvědomoval velikost jednotlivých dílků. Také u něj byla dominantním modelem osa, na které jsou vyznačena čísla jdoucí za sebou.

Ryska mezi záporným a kladným číslem a priori nulou

Druhým nejčastějším chybným řešením žáků bylo označení rysky mezi čísly –7 a 5 číslem nula. Poté si žáci, na rozdíl od předešlého typu chyb, zjistili velikost dílku. Dílek je podle nich velký 5, protože rozdíl mezi číslem 5 a nulou je pět. Tito žáci, na rozdíl od další uvedené skupiny chybujících většinou už nekontrolovali, zda je velikost dílku mezi čísly –7 a 0 také pět, a přičítáním čísla 5 označili ostatní rysky, takže jim vyšlo *X* dvacet.

Žák, který je autorem následujícího řešení (obr. 45), také viděl řešení v rozdělení osy po dílcích velkých 5, protože podle (později) zapsané jedničky předpokládal nulu uprostřed vytištěných čísel. Poté se však (na rozdíl od ostatních, kteří zvolili také tento postup) snažil ověřit své řešení i jiným způsobem, a to dělením osy na menší dílky popisující všechna celá čísla. Pokud by byla jeho teorie rozdělení po pěti správná, stačilo do každého intervalu udělat čtyři rysky, o což se snažil. Jak je vidět, popsal kladná čísla a od čísla –7 začal popisovat čísla záporná, což mu u prostřední rysky nevycházelo. Pravděpodobně protože mu chyběla čísla –2 a –1 (dvě čísla), dopsal do výsledku i řešení *X* rovno 22.



Obr. 45 Řešení 1. úlohy žáka7. roč. (ZŠ Modrá)

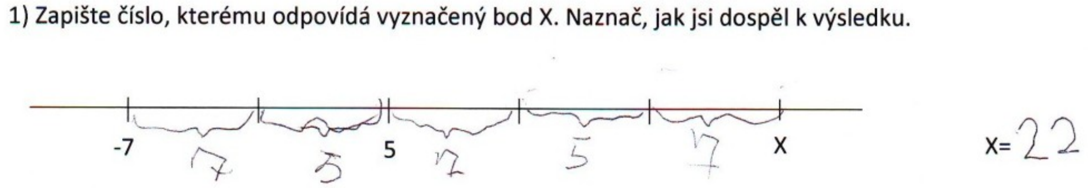
Tato chyba odpovídá modelu číselných os převážně se vyskytujících v učebnicích (zvlášť při výuce celých čísel), které vždy obsahují vyznačenou nulu, která jasně odděluje záporná čísla od kladných. Je obtížné v učebnici najít zobrazenou část číselné osy, která obsahuje nulu, ale ta není na ose popsána, nebo dokonce není ani ryskou vyznačena.

Tento způsob řešení může být také ovlivněn absencí modelu číselné osy, která by měla vyznačené dílky jinak velké než 1; 5; 10; 100…popřípadě 0,1; 0,5; 0,01…

Pro některá řešení, ve kterých žák postupoval také tak, že k číslu 5 přičítal třikrát číslo 5, které považoval za velikost vyznačeného dílku, ale která neměla žákem vyznačenou nulu, nebylo východiskem k tomuto postupu představa nuly na prostřední rysce mezi čísly –7 a 5, ale důvod, který vzešel z rozhovorů a který je uveden ve skupině chyb *různé shodné velikosti dílků*.

Nestejně velké dílky

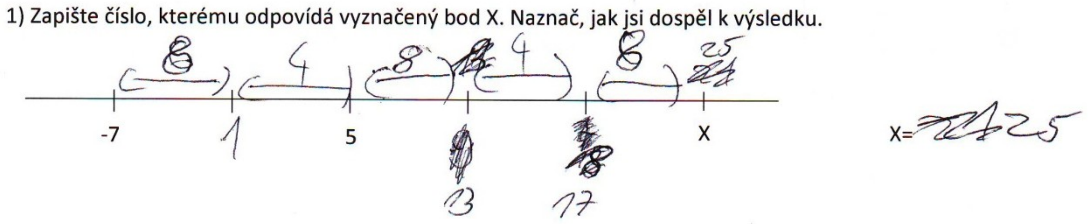
Další skupinu chyb, kterých se žáci dopustili při řešení 1. úlohy, tvořil postup, v němž žáci nejprve určili číslo rysky uprostřed mezi číslem –7 a 5 a podle něj určili velikost sousedních dílků. Na rozdíl od předchozích skupin pro ně nebylo problémem označit každý ze shodně velkých dílků čísly různých velikostí. Tyto velikosti, jak je zjevné z obrázku 46, potom algoritmicky (v jakési číselné řadě) aplikovali na další dílky na ose.



Obr. 46 Řešení 1. úlohy žákyně 8. roč. (ZŠ Zelená)

Tento způsob uvažování potvrzuje žák 7. ročníku, který svůj postup odůvodnil následovně: „Abych získal 5 musel jsem nejdřív snížit na 0 a pak se zvýší o 5 a pak o 7 a takhle dál až do *X*.“

Následující případ však ukazuje, že ne všichni žáci, kteří označovali dílky jako nestejně velké, se dopustili také chyby *ryska a priori nulou*, která by se dala považovat za logický důvod nestejnoměrného dělení dílků. Žák, který se snad snažil hledáním prostředního čísla mezi dvěma vyznačenými hodnotami rozdělit tento interval na dvě stejné části, totiž smysl tohoto jednání vzápětí popírá označením těchto polovin intervalu (viz obr. 47) čísly vyjadřujícími jejich různou velikost.

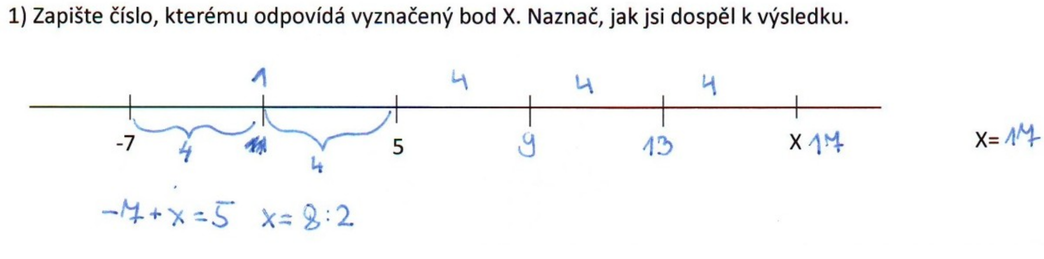


Obr. 47 Řešení 1. úlohy žáka 9. roč. (ZŠ Modrá)

Různé shodné velikosti dílků

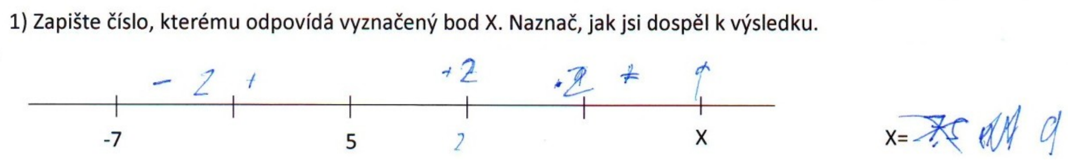
Několik žáků, kteří dodržovali zásadu stejně velkých dílků, dospělo k jejich velikosti rovné 4 (7. a 9. ročník) nebo 2 (8. ročník). Dále jsou zde uvedeny dvě části rozhovorů, kde žákyně počítaly s velikostí 5 jednoho dílku, ale ne na základě chyby *ryska a priori nulou*.

Žákyně, jejíž řešení je na obrázku 48, pravděpodobně začala hledáním velikosti dvou dílků mezi čísly −7 a 5, kterou zpětně popsala $-7 + x = 5$. Jelikož pod ryskou, kterou označila číslem 1, se nachází přeškrtané číslo 11, domnívám se, že problém nastal při přechodu přes nulu. Je možné, že žákyně na přechod přes nulu aplikovala naučený algoritmus přechodu přes desítku. Mám na mysli algoritmus používaný například při písemném sčítání, když součet jednotek obou čísel přesáhne hodnotu 9, zapíšeme pouze jednotky a desítky si pamatujeme, abychom je pak přičetli v následujícím kroku k řádu desítek. Předpokládám, že žákyně počítala tak, že zanedbala znaménko mínus a k číslu 7 přičetla 4, což je 11, ale protože se dostala přes desítku zapsala číslo 1. Potom totiž i vzdálenost čísla 1 od 5 je také rovna 4. Teprve poté bylo zřejmě napsáno $x = 8 : 2$, a to jen jako odůvodnění toho, že vzdálenost mezi čísly −7 a 5 je tvořena dvěma vyznačenými dílky.



Obr. 48 Řešení 1. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Modrá)

Žák, který přičítal k číslu 5 několikrát číslo 2 (obr. 49), tak pravděpodobně usuzoval z rozdílu kladného čísla 7 a čísla 5. Tento žák však také nerozlišoval mezi číslem jako adresou a operátorem změny, když přičítal číslo 2 pouze dvakrát podle dvou rysek mezi číslem 5 a číslem *X*.



Obr. 49 Řešení 1. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

V jeho řešení je náznak znalosti toho, že směrem k záporným číslům se od nuly odečítá, kdežto směrem ke kladným číslům přičítá. Tento poznatek však nebylo možno zcela aplikovat, protože žák pravděpodobně nedokázal určit, kde se na číselné ose nachází nula.

Následující dva rozhovory ozřejmují postup žákyň 7. ročníku ZŠ Modrá (1. rozhovor) a ZŠ Zelená (2. rozhovor), které obě měly zato, že velikost předtištěného dílku je pět.

> Ž: Já jsem si dělala na druhý papír časovou osu a (T: Časovou?) a tam jsem si vlastně zakreslila to mínus sedm a odpočítávala jsem to do tý dvojky (Číslem −2 má označenu rysku mezi čísly −7 a 5.) a do tý pětky, aby tadyto (Ukazuje vyznačenou rysku mezi čísly −7 a 5.) vlastně byl prostředek mezi tou pětkou a mínus sedmičkou.
>
> […]
>
> Ž: (Na pokyn tazatelky kreslí osu a popisuje všechny dílky −7 až −2 celými čísly.) Tady je vlastně už ta mínus dvojka. Pak k tý pětce zbývá ještě všech těch pět čísel, co jsem teď napsala.
>
> T: Od té mínus dvojky k té pětce?
>
> Ž: To je taky pět čísel. (Žákyně při dalším dopisování celých čísel až do čísla 5 na svou číselnou osu některá vynechala.)

Druhá žákyně uvádí ke svému řešení jiný postup.

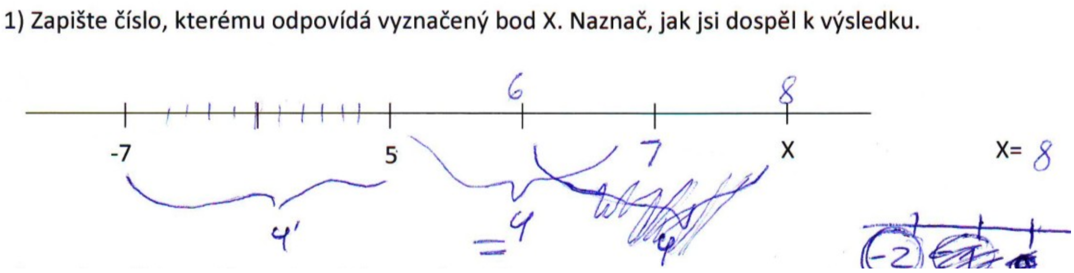
> Ž: Tak nejdřív jsem vlastně si odvodila, že když je to mínus, tak tady (Ukazuje na rysku v polovině mezi 5 a −7.) bude asi taky mínus, ale nepřeskočí se to hned na tu pětku, takže jsem…no já jsem to vlastně tipovala a došla jsem k tomu, že by to možná mohlo být mínus pět a potom pět, a že by to bylo po pěti, takže *X* je dvacet, jsem si řekla, ale nejsem si jistá.
>
> T: Takže mezi mínus pětkou a pětkou je rozdíl pět?
>
> Ž: No řekla bych, že asi jo.

Žákyně dokázala svůj postup opravit, když na otázky tazatelky, kolik je mezi čísly 0 a 5 a čísly 0 a −5, a tedy jaký je rozdíl mezi 5 a −5, odpověděla správně.

Symetrické řešení

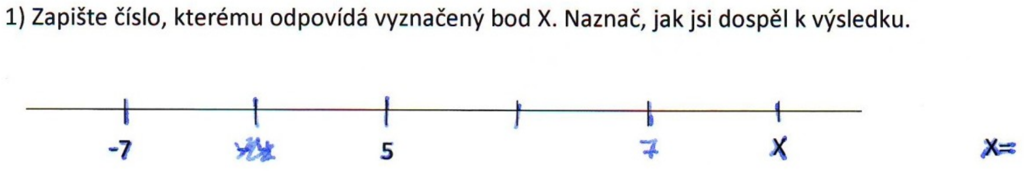
Žák 8. ročníku (ZŠ Zelená) (který přišel po 1. stupni z jiné školy) je v rozhovoru přesvědčen o správnosti svého řešení (obr. 50).

> Ž: Tady jsem udělal sedmičku symetricky podle té pětky a *X* jsem odhadl na osmičku (chvíle ticha) no, tady je totiž 5, 6 ,7 ,8. *X* je 8.



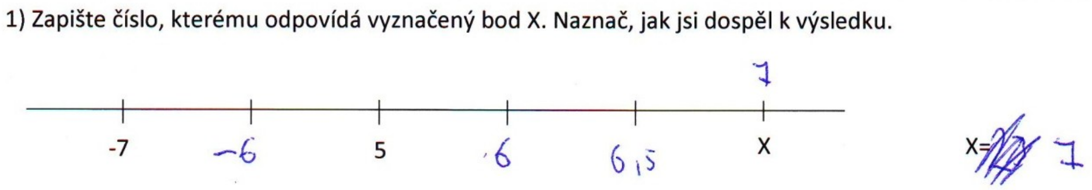
Obr. 50 Řešení 1. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Následující řešení potvrzuje tento postup i u žákyně 9. ročníku. Ta dopsala kladné číslo 7 symetricky podle čísla 5. Možná nedospěla k výsledku právě proto, že si uvědomila, že tento postup není správný. Což dokládá přeškrtnuté číslo –4, když se snažila dál dopisovat celá čísla.



Obr. 51 Řešení 1. úlohy žákyně 9. roč. (ZŠ Modrá)

Řešení, které kumuluje více postupových chyb (nerespektování stejně velkých dílků, dopsání čísla –6 jako následujícího po čísle –7), však také upozorňuje na nedůsledné symetrické zobrazení podle čísla 5 (obr. 52). Zajímavé je, že původní výsledek, který je přeškrtnutý, byl správný.



Obr. 52 Řešení 1. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Snaha postupovat symetrickým zobrazením čísel podle nenulového čísla (se zachováním zápornosti čísel nalevo a kladnosti napravo od tohoto nenulového čísla) je pravděpodobně zakořeněna v žácích v důsledku přílišného setkávání se s číselnými osami, kde je 0 vyznačena uprostřed znázorněné části číselné osy a opačná čísla jsou navzájem symetrická.

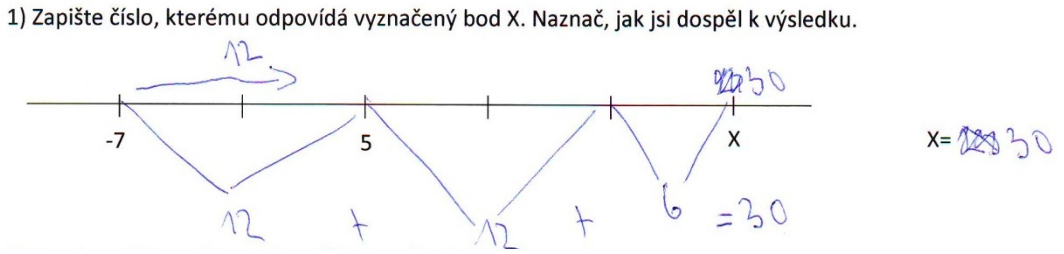
Řešení –7 + 5

Žák z 9. ročníku, který uvedl tento součet do výsledku, pravděpodobně jen zkombinoval uvedená čísla, a to považoval za výsledek. Předpokládám to také z přeškrtaného původního výsledku $-\frac{7}{5}$. Žáci, kteří se učí mechanicky bez porozumění číslům, často provedou se zadanými čísly nějakou operaci a považují to za výsledek, protože do matematicky zapsané situace nemají potřebný vhled.

I žák 8. ročníku možná ze stejných důvodů uvedl tento součet jako výsledek.

Číslo –7 nebo 5 je považováno za počátek

Několikrát se u žáků objevila chyba, která byla až v samém závěru postupu. Žák zjistil správně velikost dvou dílků, tedy vzdálenost –7 od 5. Chyby se dopustil, když začal vyčíslovat *X*. Žák vynásobil velikost dílků jejich počtem, ale nepřičítal je k číslu 5, pokud počítal pouze 3 dílky, nebo k číslu −7, pokud počítal 5 dílků. Tato čísla (−7 nebo 5) vlastně považoval za 0 (počátek). Zajímavé je, že autorka řešení z obrázku 53 dospěla nejprve ke správnému výsledku, který však přeškrtla a opravila.



Obr. 53 Řešení 1. úlohy žákyně 8. roč. (ZŠ Modrá)

Řešení, kdy žák počítal, že číslo X se rovná vzdálenosti od čísla −7, se vyskytlo i během rozhovoru s žákem 9. ročníku. Poté, co dospěl s dopomocí tazatelky k tomu, že mezi číslem −7 a 5 je vzdálenost 12, tedy jeden vyznačený dílek je velký 6, pokračoval rozhovor:

T: Zkusil bys teďko už opravit to *X*? Jakou bude mít přesnou hodnotu? Povedlo by se ti to?

Ž: Povedlo.

T: Když víme už, že jeden díl je šest.

Ž: Tady mám dvanáct (Ukazuje na číslo 5.), plus šest (Ukazuje na další rysku na ose směrem k *X*.) je osmnáct…

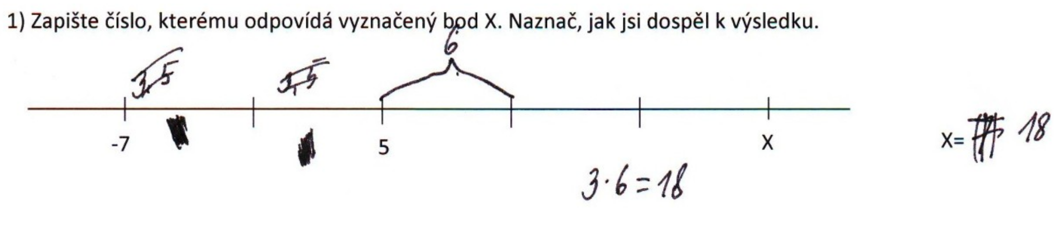
T: Kde máš dvanáct? Jako tady? (Ukazuje na rysku s číslem pět.)

Ž: No tady mám dvanáct (Ukazuje, že ty dva dílky mezi −7 a 5, to je těch dvanáct.) a k tomu si přičtu šest, tady mám osmnáct, plus šest, tady mám dvacet čtyři…

T: A když už máme…od nuly počítáme nebo od té pětky nebo od té mínus sedmičky? Co bereš jako počátek? Tys počítal od té mínus sedmičky, že jo? (Žák souhlasí.) Když jsi řekl, že sem máme dvanáct…

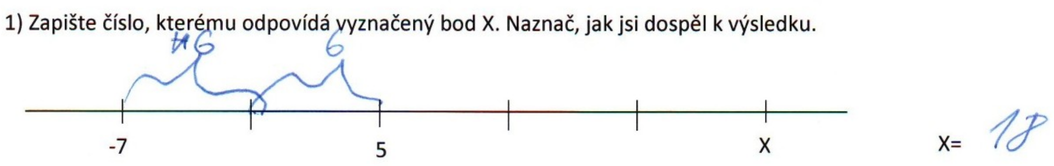
Ž: Tak musím počítat od té nuly. (Ukazuje na rysku mezi −7 a 5.)

Někteří žáci možná počítali velikost dílků od prvního vyznačeného čísla, což by mohlo být způsobeno častým výskytem nuly na počátku zobrazené číselné osy. Pravděpodobně, kdyby byla na ose znázorněna 0, žáci by se této chyby nedopustili tak snadno. Toto však neplatí u následujících dvou příkladů řešení, ve kterých žáci uvažovali počátek v čísle 5.



Obr. 54 Řešení 1. úlohy žáka 6. roč. (ZŠ Zelená)

Podobné řešení se objevilo i v 7. ročníku ZŠ Modrá (viz obr. 55). V těchto řešeních se projevuje problém žáků v chápání čísla na číselné ose jako adresy nebo jako vzdálenosti od počátku, jak bylo popsáno v oddíle 1.4. U dalších žáků, kde se objevil například výsledek 15 (bohužel nijak nezdůvodněn), mohlo dojít k chybě *ryska mezi a priori nulou* a stejnému chybnému postupu jako v těchto uvedených příkladech. To ovšem není doložitelné.



Obr. 55 Řešení 1. úlohy žáka7. roč. (ZŠ Modrá)

Tato řešení také ukazují neporozumění žáka rozdílu čísel a vztahu mezi číslem jako adresou a číslem jako operátorem změny.

Problém přechodu přes nulu

Chyby, kterých se žáci dopouštěli, když přecházeli mezi zápornými a kladnými čísly přes nulu, se vyskytovaly až na výjimku pouze v nižších dvou ročnících.

Nejprve uvedu některé chyby, které jsou na hraně nepozornosti a nemají patrně strukturální kořen. V rozhovoru s žákyní 6. ročníku ZŠ Modrá, v němž odůvodňovala své porovnání většího a menšího čísla, použila při jmenování čísel od nuly doleva také číslo mínus nula. Nejsem však zcela jistě oprávněna napsat ani, že myslela, že se na číselné ose vyskytuje i nula i mínus nula, nebo že jen nepřesně ukazovala a mluvila o nule jako o mínus nule, protože pokračovala dále zápornými celými čísly.

Ž: Protože tady bude mínus nula, mínus jedna, mínus dva, mínus tři, mínus čtyři. Že to půjde do mínusu.

V 8. ročníku. na ZŠ Modrá se žákyně při rozhovoru nad testem snažila přijít na vzdálenost čísla –7 od čísla 5 postupným počítáním celých čísel, které se mezi těmito dvěma čísly nacházejí.

Ž: (Počítá na prstech.) Deset?

T: Jaks to počítala? Když máš…

Ž: Hm. –7 jakoby –6, –4, –3, –2. (T: A mínus pětku jsme vynechaly… –7; –6; –5.)

Ž: Hm, jo. –4; –3; –2; –1, potom 1, 2, 3, 4, 5, jo 4, 5, jsem akorát vynechala tu pětku.

Tato žákyně v řadě celých čísel některá vynechávala. Číslo 5 pravděpodobně z nepozornosti, ale číslo 0 zřejmě vynechala, protože v tu chvíli zapomněla, že do této řady celých čísel patří. Nulu totiž, jak se ukázalo při rozhovoru, vynechala i žákyně 7. ročníku ZŠ Modrá, když si kreslila a popisovala vlastní číselnou osu.

Strukturální povahu měly chyby, které udělaly dvě žákyně 6. ročníku. První (ze ZŠ Zelená) v rozhovoru, kdy se snažila vyčíslit prostřední rysku mezi –7 a 5.

Ž: Šest, takže tam by mělo být….(Přemýšlí.)…3, ne, to je blbost.

T: Tak když jdeš od pětky a jdeš směrem k záporným číslům, tak kam se dostaneš, když ujdeš těch šest krůčků, jakoby?

Ž: No, k mínus devítce.

T: Z té pětky, když jdeš o šest.

Ž: K nule? Nevím.

T: Tak když jdeš: do 4, tak jeden, do trojky, do dvojky, do jedničky, do nuly a šestý je do …(Ukazuje na prstech, žákyně stále neví.) Tak když ti tady nakreslím číselnou osu (Kreslí novou pod to.), kde budeš mít tady pětku a tady máme ten dílek, který nevíme, co je. To je tady ten dílek (Ukazuje na horní číselné ose.). A my víme, že mezitím je šest dílků, malých. Tak když je tam udělám (Rozděluje interval na 6 dílků.), tak jak bys je postupně označila – ty dílky?

Ž: 4, 3, 2, 1, 0, –9 (chvíli ticho) nebo –1. Tak spíš mínus jedna.

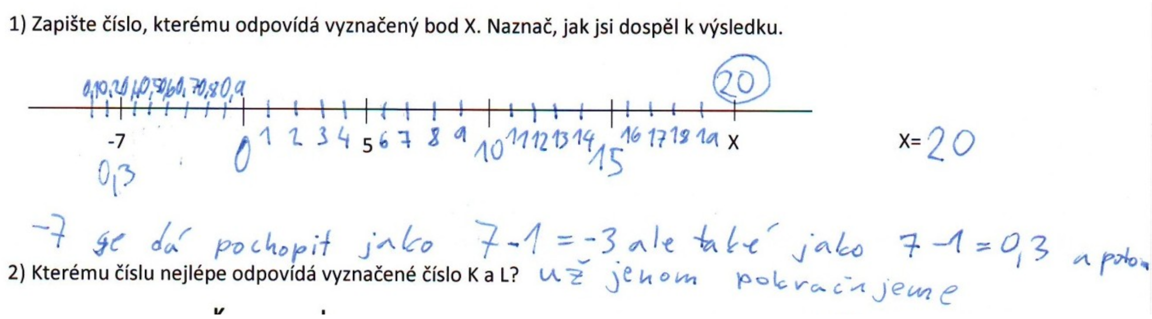
T: A proč mínus devět bys tam dávala?

Ž: No já nevím, protože… mínus jedna. Tam bude určitě mínus jedna.

T: A proč?

Ž: No protože, kdyby tam bylo –9, tak by se pak dál nemohlo pokračovat. Protože to by byla jako jednička jenom do nuly… (Neví, jak dál, a uzavírá.) No, prostě tam bude mínus jedna.

Podobnou chybu můžeme vidět i v řešení z obrázku 56, kde jsou čísla zapsána v pořadí od menších vlevo po větší vpravo tak, že se v posledním zapsaném čísle před nulou vyskytuje číslice 9. To naznačuje, že žáci nehledí na velikost daných čísel (v absolutní hodnotě), ale na systém jejich zapisování a následnosti. Tento systém aplikují i na čísla „před nulou“. V této úloze navíc žákyně místo zápisu záporných čísel používá sytém čísel desetinných, což ukazuje na formální znalost, tedy nepochopení významu těchto čísel.



Obr. 56 Řešení 1. úlohy žákyně 6. roč. (ZŠ Modrá)

Žákyně zajímavě ospravedlňuje fakt, že jí vyšla hodnota 0,3 na rysku popsanou již číslem –7. Popisuje rovnost těchto čísel, což potvrzuje existenci formální znalosti.

4.7.2 Vyhodnocení 2. úlohy

U této úlohy neplatí, jak je vidět z tabulky 6, že by se úspěšnost řešení zvyšovala se zvyšujícím se ročníkem. Může to však být způsobeno schopnostmi žáků v konkrétních třídách a historií každé třídy. Také by to ale mohlo být způsobeno tím, že se tyto úlohy z učebnic pro starší ročníky vytratily a žáci, kteří se učí s číselnou osou pracovat mechanicky, v práci s ní snáze udělají chybu, když se s ní už nesetkávají. Oproti tomu však žák 9. ročníku má větší zkušenosti s operováním s čísly než žák 6. či 7. ročníku.

Tabulka 6: Úspěšnost žáků v řešení 2. úlohy

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">ZŠ Modrá</td><td colspan="4">ZŠ Zelená</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">0,5</td><td colspan="2">1,2</td><td colspan="2">0,5</td><td colspan="2">1,2</td></tr>
<tr><td>6. roč.</td><td colspan="2">19/19 (100 %)</td><td colspan="2">10/19 (52,6 %)</td><td colspan="2">25/27 (92,6 %)</td><td colspan="2">13/27 (48,1 %)</td></tr>
<tr><td>7. roč.</td><td colspan="2">18/20 (90 %)</td><td colspan="2">10/20 (50 %)</td><td colspan="2">24/26 (92,3 %)</td><td colspan="2">16/26 (61 %)</td></tr>
<tr><td></td><td>0,5</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1,2</td><td>$\frac{6}{5}$</td><td>0,5</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1,2</td><td>$\frac{6}{5}$</td></tr>
<tr><td>8. roč.</td><td>21/22 (95,5 %)</td><td>19/22 (86,4 %)</td><td>11/22 (50,0 %)</td><td>8/22 (36,4 %)</td><td>21/23 (91,3 %)</td><td>17/23 (73,9 %)</td><td>14/23 (60,9 %)</td><td>8/23 (34,8 %)</td></tr>
<tr><td>9. roč.</td><td>16/19 (84,2 %)</td><td>15/19 (78,9 %)</td><td>6/19 (31,6 %)</td><td>3/19 (15,8 %)</td><td colspan="4">-</td></tr>
</table>

Žáci měli určit, kterému číslu odpovídají vyznačené body K ($K = 0{,}5$ nebo $\frac{1}{2}$) a L ($L = 1{,}2$ nebo $\frac{6}{5}$). Číslo 0,5 je jedno z často používaných čísel a žáci ho určovali téměř bezchybně. Správně ho (počítám-li v 8. a 9. ročníku úspěšnost desetinného vyjádření) určilo 144 z celkových 156 žáků (tj. 92,3 %). V 6. a 7. ročníku žáci neměli určeno, jakým způsobem mají zapsat výsledek, a ani předchozí úloha je nenaváděla k použití zlomků či desetinných čísel. V těchto ročnících byl pouze jeden žák, který správně zapsal jeden z výsledků smíšeným číslem, a jeden žák, který se vyjádřil zlomkem chybně. Žáci v těchto ročnících mají buď lépe osvojena desetinná čísla než zlomky nebo to odráží to, že se využívat číselnou osu učí mnohem více ve spojení s desetinným zápisem čísla než s číslem ve zlomku.

Žáci starších dvou ročníků měli zapsat obě čísla jak zlomkem, tak desetinným číslem. Pouze pět žáků (z 64) zapsalo číslo $\frac{6}{5}$ zlomkem v základním tvaru (což ale nebylo explicitně požadováno). Nejčastějším správným zápisem tohoto zlomku (14krát) byl nezkrácený tvar zlomku nebo forma smíšeného čísla. V řešeních žáků se vyskytuje jak převádění zlomku na desetinné číslo, což je zaznamenatelné v některých testech častěji u převodu jedné poloviny [26] na desetinné číslo, tak častější postup převodu desetinných čísel na zlomek. Druhý jmenovaný postup byl (i díky chybám, kterých se žáci dopouštěli) zaznamenán spíše u čísla 1,2. To, že žáci nečetli vyjádření čísel (zlomkem a desetinným číslem) z číselné osy nezávisle na sobě a že se dopouštěli mnohých chyb v přečtení čísla 1,2, se promítlo do úspěšnosti vyjádření čísla 1,2 zlomkem.

V rozhovorech žáci uváděli rozdílné priority vyjádření čísla. Jeden žák začínal desetinnými čísly a poté je převáděl na zlomky, druhý žák začínal zlomky z důvodu, který uvedl na dotaz, zda jsou mu milejší zlomky: „Ne, mně jsou milejší desetinná čísla, ale já jsem to bral postupně.“ (Tedy v pořadí, v jakém to je na papíře.) Třetí žák uvedl, že zlomky jsou snazší, že jimi začínal, protože si to může rozdělit na desetiny. Avšak, když mi ukazoval, jak při řešení postupoval, ty desetiny, na které dílky dělil, zapisoval desetinným číslem.

V rozhovoru (8. ročník ZŠ Modrá) je žákyně, která zapsala jednu polovinu zlomkem $\frac{5}{10}$, vyzvána, aby tuto hodnotu na ose vysvětlila.

> Ž: No, protože těch, když je tady ta nula, tak, jakoby, je to polovina, tady je ta jednička, tak je to vlastně polovina té jedničky.

Ačkoliv žákyně nemluví o desetinách, ale mluví o polovině, je zřejmé, že zápis $\frac{5}{10}$ vznikl převodem z desetinného čísla.

Někteří žáci se při převodu desetinného čísla na zlomek dopouštěli chyb, které pramení z nepochopení významu čísel ve zlomku. Protože obtížnosti zlomků se věnují mnohé jiné práce, zmíním zde pouze dva nejčastější typy chyb. Chybou, kterou můžeme pozorovat v testech a vyskytla se i v několika rozhovorech, je zápis jedné poloviny jako jedné pětiny, což by mohlo být ovlivněno desetinným zápisem čísla (0,5).

Tuto chybu ilustruje žák 9. ročníku ZŠ Modrá, který psal místo $\frac{1}{2}$ číslo $\frac{1}{5}$ a v rozhovoru svůj výsledek komentoval následovně:

> Ž: No, je to v polovině, takže to bude plus jedna pětina.
>
> T: Je to v polovině, takže to bude plus jedna pětina? Kolik pětin se ti vejde do jedničky?
>
> Ž: (Rychlá odpověď.) Dvě.
>
> T: Takže, když sečtu jedna pětina a jedna pětina?
>
> Ž: Ne,… do jedničky se mi vejdou… dvě pětiny, no. To jako dvě poloviny.

---

[26] Číslo 0,5 vyjádřilo 36 žáků z 64 jako $\frac{1}{2}$ a pouze 15 jako nezkrácený zlomek $\frac{5}{10}$.

T: Tak dvě pětiny nebo dvě poloviny?

Ž: Dvě poloviny.

Přestože došlo k vyjasnění pojmů, žák si i nadále během rozhovoru pletl polovinu s pětinou. Druhou chybou plynoucí z nepochopení významu čísel ve zlomku je zápis zlomku přeskupením číslic desetinného čísla ($\frac{0}{5}$; $\frac{5}{0}$ pro 0,5 a $\frac{0}{2}$ pro 0,2; $\frac{1}{1}$ pro 1,1; $\frac{1}{2}$ pro 1,2) nebo upraveným přeskupením číslic (např. 0,4 má odpovídat $\frac{1}{4}$). V opačném převodu ze zlomku na desetinná čísla jsem tuto chybu nezaznamenala.

Co se týká práce na číselné ose, je v této úloze evidentně nejčastější chybou zanedbání velikosti čísla *L* (1,2), které je interpretováno, jako by bylo v intervalu (0;1). Zde je jedno, pomocí kterých číselných reprezentantů žáci čísla z osy četli, v každém případě si neuvědomovali, že je *L* větší než jedna. Žáci toto číslo pravděpodobně četli jako vzdálenost od nejbližší levé (zde celočíselné) rysky, přestože není počátkem. Tato chyba se objevila ve stejném zastoupení na obou školách, celkově ze všech (156) testovaných žáků ji udělalo 27. Např. žák 9. ročníku ZŠ Modrá, který se snažil vyčíslit *L* nejdříve pomocí zlomků, se dopustil této chyby. Poté, co vysvětlil, jak si dílek mezi číslem 1 a 2 rozdělil a dospěl k *L*, které bral jako vzdálenost od rysky vyznačující číslo 1, probíhal následující rozhovor, ve kterém se tazatelka snažila dovézt žáka k reflexi chyby. Na dotaz, zda jedna třetina (jak odhadl číslo *L*) je menší, nebo větší než jedna, odpověděl značně nejistě: „Jedna třetina je… vět… menší než jedna.“.

Tazatelka navedla žáka přes model koláče, který, jak se ukázalo, evidentně znal lépe.

T: Když vezmeš třetinu koláče, tak je to menší než celý koláč, nebo větší než celý koláč?

Ž: Menší než koláč.

T: To znamená, že to je menší než jedna.

Ž: Takže to je blbost, tam budou dvě jakoby třetiny.

T: Budou tam dvě třetiny. A dvě třetiny jsou menší než jedna, nebo větší než jedna?

Ž: Jsou větší než jedna.

T: Kolik třetin je jednička?

Ž: Tři třetiny.

T: A když mám jen dvě třetiny?

Ž: Tak to musí být, tak to bude…

T: Jednička jsi řekl, že jsou tři třetiny, takže to *L* by mohlo být?

Ž:…tři třetiny, ne….No tři třetiny mám jedničku, tak to by mohlo být šest třetin.

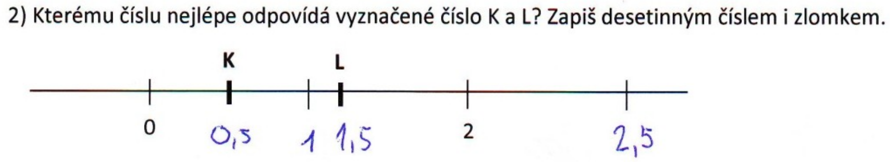
Než proběhl tento rozhovor, žák ukazoval, jak dospěl k výsledku $\frac{1}{3}$. Přestože pracoval se zlomky, nevyužíval jemnější dělení vhodné pro zadané zlomky, ale dělil dílek na deset menších dílků, jak je pravděpodobně zvyklý z desetinných čísel. Teprve z toho nepřesně určil *L*.

Ž: Protože tady mám tu dvojku a tadyto je jednička, tak jsem si jako,… že tady má být deset čárek, abych měl tu dvojku, tak jsem to nějak logicky odhad, že to je jedna třetina.

T: A kolik těch čárek by byla ta jedna třetina?

Ž: To by byly jako tři čárky.

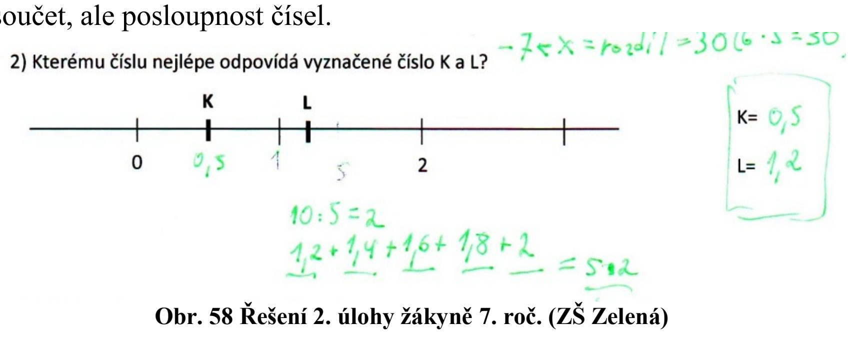
Ačkoliv byly dílky číselné osy dostatečně velké a zároveň dostatečně malé na to, aby se velikost čísla *L* dala snadno odhadnout například pravidelným rozdělením dílku na menší nebo jeho půlením, mnozí žáci chybovali v nedostatečné přesnosti. Nejpočetněji je zastoupena hodnota 1,3, která se v testech vyskytla 14krát. K ní by se daly přičíst ještě tři případy hodnoty 0,3. Žáci, kteří uvedli tuto hodnotu, dílek mezi číslem 1 a 2 nedělili vůbec, dělili velmi nepřesně na 10 dílků, nebo načrtli pouze ony tři dílky (asi předpokládané velikosti) mezi rysku vyznačující číslo 1 a číslo *L*. Druhou početnou hodnotou pro *L*, bylo 11krát uvedené číslo 1,1. Zde žáci také buď nedělili dílky vůbec, nebo je rozdělili nerovnoměrně (tzn. první dílek řekli, že je od rysky vyznačující číslo 1 k *L*, a dalších devět vměstnali mezi *L* a rysku s číslem 2). Třetí početnou skupinou, kterou uvedu, je hodnota 1,25 pro *L*, což odpovídá dělení dílku na čtvrtiny. V těchto devíti případech dělili dílky pouze dva žáci na čtvrtiny a jeden na polovinu, ostatní žáci si je více nedělili. Také do této skupiny by se mohl zařadit ještě jeden případ s hodnotou 0,25, jejíž autor si dílek také rozdělil na čtvrtiny. Ve všech případech je však z náčrtku zřejmé, že dílky nejsou stejně velké, s čímž souvisí další chyba, která se v úloze objevila. Touto chybou je ignorování velikosti dílků a žákovo zaměření se na jím vydedukovanou posloupnost čísel u vyznačených rysek. Žáci ryskám připisovali čísla postupně se od nuly zvyšující o polovinu, tudíž místo hodnoty 1,2 pro *L* uváděli 1,5 (obr. 57). Zde bych předpokládala, že se těchto chyb dopustili spíše žáci ze ZŠ Modrá na základě zkušenosti s číselnými osami v učebnicích, avšak 4 z 5 těchto chyb se vyskytly na ZŠ Zelená, přestože minimálně na prvním stupni žáci pracovali s osami s různým dělením.



Obr. 57 Řešení 2. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Pět žáků z těch, s kterými byl veden rozhovor, vyjádřilo *L* chybně jako číslo menší než 1 nebo označili rysku *L* jiným blízkým číslem. Všichni se během rozhovoru (až na žáka 9. ročníku ZŠ Modrá) dokázali velice rychle opravit.

Při řešení této úlohy si žáci (pokud tak vůbec činili) dělili dílky na pětiny nebo na desetiny. Na obrázku 58 je jedno z řešení, ve kterém (na rozdíl od jiných) žákyně nedoplnila rysky při dělení na menší dílky, i když tento proces myšlenkově také proběhl. Je popsán zápisem, který však nevyjadřuje součet, ale posloupnost čísel.



Obr. 58 Řešení 2. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Zelená)

Nakonec uvedu tři řešení, jejichž výskyt je ojedinělý. Jeden žák k výsledným hodnotám dopsal centimetry, přestože míry na číselné ose jim neodpovídají, a dva žáci asi po vzoru první úlohy vyjádřili *K* a *L* celými čísly. Žákyně 7. ročníku ZŠ Modrá, přestože číslo *L* zapsala správně, si za chybným výsledkem čísla *K* stála i při rozhovoru, když říká: „No, já jsem si řekla, že *K* je uprostřed tý nuly a jedničky, takže to bude mínus pět." Tato chyba však vyjadřuje zásadní nepochopení struktury čísel.

4.7.3 Vyhodnocení 3. úlohy 6. a 7. ročníku (tj. 3a 8. a 9. ročníku)

Pro řešení této úlohy se nabízejí dva základní směry. Buď žák chápe číslo jako jeho vzdálenost od nuly, a tedy, aniž by musel hodnoty vyznačených čísel znát, sčítá čísla jako délky úseček, nebo žák nejdříve zjistí, jakým číslům odpovídají dané rysky, aritmeticky je sečte a výsledek opět vyznačí na číselné ose. Žáci převážně volili druhý jmenovaný způsob, a proto některé špatné výsledky vycházejí ze špatného určení čísel odpovídajících rysek. Počty správných řešení jsou uvedeny v tabulce 7. Ze 102 správných řešení 74 žáků uvedlo explicitně aritmetický součet těchto čísel. Pouze 10 žáků napsalo (nebo při vybírání testů řeklo), že neví, jak tuto úlohu vyřešit. A pouze dva žáci 9. ročníku si na číselnou osu znázornili nulu.

Tabulka 7: Úspěšnost žáků v řešení 3. úlohy (3a)

	ZŠ Modrá	ZŠ Zelená
6. ročník	11/19 (57,9 %)	16/27 (59,3 %)
7. ročník	10/20 (50,0 %)	20/26 (76,9 %)
8. ročník	16/22 (72,7 %)	18/23 (78,3 %)
9. ročník	11/19 (57,9 %)	-

Mezi chybnými odpověďmi se vyskytly různé výsledky mezi čísly 1 a 5,5. Jeden žák uvedl jako výsledek číslo 10, možná na základě 10 dílků, které si vyznačil mezi čísly P a Q. Pokusím se však nečlenit chyby primárně podle stejných výsledků, ale podle možných podobných příčin.

První typ chybných řešení, který však vzhledem k zaměření práce nezasluhuje mnoho pozornosti, spočíval v chybách při sčítání správně vyjádřených čísel. U dvou žáků lze říci na základě testu zcela určitě, že po správném přečtení čísel P a Q udělali chybu opravdu při sčítání, kde jim vyšlo číslo 3. Z rozhovoru vyplynulo, že tuto chybu udělala také žákyně 6. ročníku ZŠ Modrá. Dá se proto předpokládat, že i v dalších případech, kde jsou v testech uvedeny nepodložené chybné výsledky, došlo ke špatnému sečtení čísel. Chyby podobného charakteru se dopustil také žák 9. ročníku ZŠ Modrá, jehož výsledek součtu byl 4,5. V rozhovoru se navíc projevila chyba ve čtení zápisu čísel, která v tomto případě však žákovi nebránila ve správném myšlenkovém postupu.

Ž: No, jakoby, tady mám, když mám jedna, dva, tři, čtyři, pět, tak tady mám dvojku, trojku a čtyřku. (Dopisuje čísla na číselnou osu.) Tak mám, jakoby, jednu polovinu plus dvě poloviny (Do vzduchu kreslí čísla u P a Q.), což mi dává čtyři. No, trochu jsem to přestřelil. Ale to, když mám jednu polovinu a dvě poloviny, tak mi to dává čtyřku.

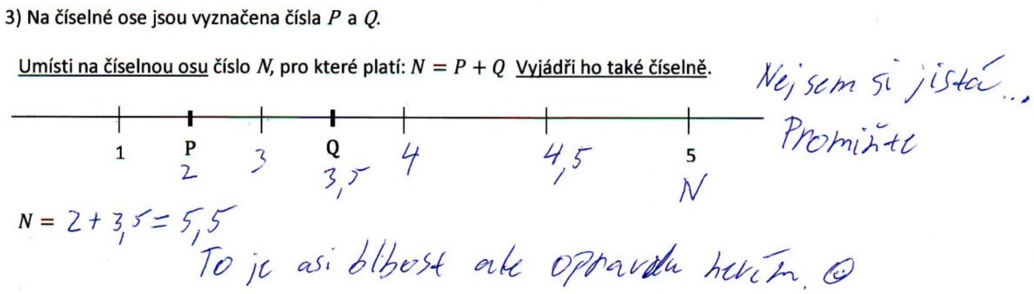
T: Jedna polovina a dvě poloviny?

Ž: No, když to sečtu, tak jakoby jedna plus dva je tři a půl a půl je deset, tak to je čtyři. Půl a půl je deset… No, jakoby, když si to napíšu, tak mám dvě poloviny a jedna polovina. (Pod sebe ale píše 2,5 a 1,5 a podtrhává.)

V rozhovoru s žákyní 8. ročníku ZŠ Modrá se při součtu čísel P a Q také projevilo strukturální nepochopení čísla, když na výsledek součtu $1{,}5 + 2{,}5 = 3{,}10$ přišla zvlášť sečtením čísel před desetinnou čárkou a těch za ní.

Při postupu, který jsem nazvala aritmetickým, se žáci dopustili nejvíce chyb, když číslo, které bylo vyznačeno na číselné ose jako první, přestože to bylo číslo 1, považovali za počátek. Této chyby se dopustilo minimálně 13 žáků, z jejichž testů je tato chyba poznat ve vyčíslení čísel P a Q nebo v zaznamenání výsledného čísla na rysku odpovídající číslu o 1 většímu, než je jejich zapsaný výsledek. Postup na obrázku 60 zřetelně ukazuje, že žák první rysku na číselné ose považoval za počátek a měřil vzdálenosti k P a Q ne od nuly, ale od čísla 1.

Mezi řešeními se vyskytly dva ojedinělé, avšak zajímavé postupy. Jeden spočívá ve vyčíslení N pomocí pokračování v řadě P, Q, N, které odpovídá číslům 1,5, poté 2,5, a tedy N je 3,5. V druhém případě žákyně k vyčíslení vyznačených bodů na ose použila pouze čísla celá a jejich poloviny nezávisle na jejich vzájemné vzdálenosti na ose. Toto řešení na obrázku 59 také ukazuje, že jediné, co žákyně respektuje, je uspořádání čísel mezi číslem 1 a 5, ale není schopná správně přečíst odpovídající čísla vyznačených rysek.



Obr. 59 Řešení 3. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Modrá)

Žádný z devíti žáků, z jejichž testů lze rozpoznat pokus o geometrický způsob sčítání, nedospěl ke správnému výsledku. Ve všech případech to však nebylo způsobeno nepřesností, ale špatným postupem. Žákyně 6. ročníku ZŠ Zelená popisuje svůj geometrický postup následovně:

Ž: No, já si to zase takhle odhadla nějak velikostně. (Ukazuje míru mezi dvěma prsty.) Jsem to tak prostě nějak pochopila.

T: A jak jsi to teda odhadovala? Dokázala bys mi to vysvětlit?

Ž: No prostě…vím, že to mám špatně. Já jsem myslela…

T: Jaks přišla na to, že to máš špatně?

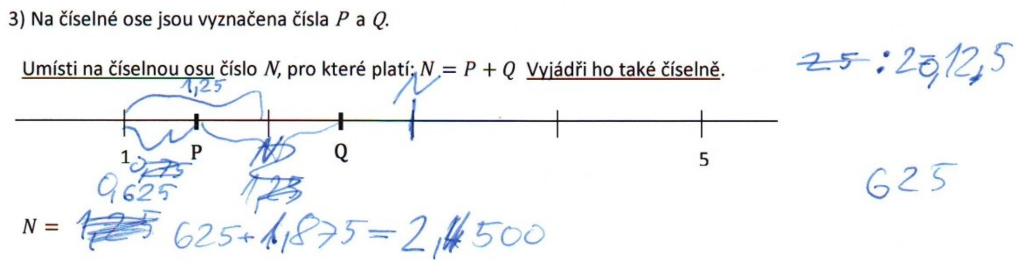
Ž: No, kdyby to bylo 3,3, tak by to muselo být někde tady. (Ukazuje na odpovídající místo 3,3 na číselné ose.) Takže 3,9.

T: A jaks přišla na to, kde je tady umístěné to *N*?

Ž: No, že jsem zase jako velikostně… (Nepřesně pomocí prstů ukazuje nanášení míry. Vezme vzdálenost mezi *P* a *Q* a z *Q* ji nanese dál na číselnou osu, kde má zakreslené *N*.)

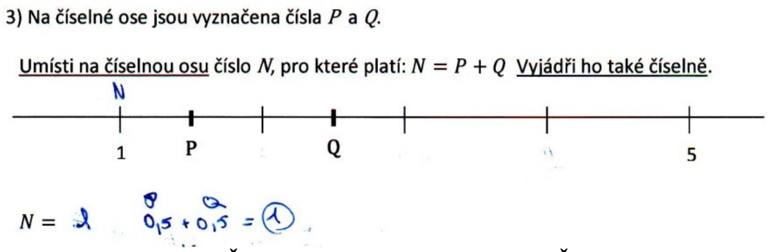
Dále se tazatelka snažila žákyni dovést (s upozorněním na umístění čísla 1 na číselné ose) k pochopení velikosti čísel jako vzdálenosti od nuly, ale žákyně nebyla v krátkém čase tomuto poznatku přístupná a držela se své geometrické představy. Po dotazu, jakému číslu odpovídá *P*, však rychle dospěla už bez pomoci k výsledku.

Podobným geometrickým řešením, avšak chybným, protože jednotka neodpovídá 1 cm, jak žák předpokládal, je přesné měření vzdálenosti vyznačeného čísla od počátku, které je zřejmé z obrázku 60. Je nutné poznamenat, že to je řešení jiného žáka než toho, který dopsal cm k výsledku ve 2. i v této úloze. Je tedy vidět, že žáci vnímají propojenost číselné osy s jednotkami míry, avšak možná se žák dopustil této chyby na základě úloh v učebnicích, ve kterých je dána jednotka číselné osy 1 či 10 cm.



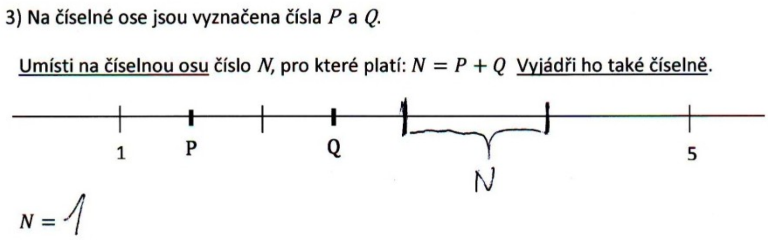
Obr. 60 Řešení 3. úlohy žáka 7. roč. (ZŠ Modrá)

Šest žáků 7. a 8. ročníku pracovalo s dílky na číselné ose jako s úsečkami. Zdůvodnění u těchto řešení vypadalo obdobně jako na obrázku 61. Tento způsob řešení, kdy *P* se rovná délce úsečky od čísla 1 po *P* a *Q* délce úsečky od nepopsané rysky vyznačující číslo 2 po *Q*, použili a v rozhovoru potvrdili také žáci 8. ročníku obou škol.



Obr. 61 Řešení 3. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Modrá)

Těmto žákům díky tomu, že nebrali ohled na aritmetickou strukturu číselné osy, nevadilo, že vyznačují výsledek součtu, tedy číslo 1, na číselnou osu jako číslo menší než oba sčítance. Jeden žák, jehož řešení je na obrázku 62 pravděpodobně ze stejných důvodů vyznačil *N* jako délku dílku velikosti 1, až na dalším (ještě nepoužitém) celém jednotkovém dílku.



Obr. 62 Řešení 3. úlohy žáka 7. roč. (ZŠ Modrá)

Řešení, které je těžké zařadit do geometrického či aritmetického postupu, se objevilo celkem v pěti a snad i dalších 4 případech, kdy žák jako výsledek součtu vyznačil číslo uprostřed mezi čísly *P* a *Q*. Výsledek této chyby a chyby, ve které žák ignoroval číslo 1 a považoval ho za počátek, vycházel v obou případech 2. Proto případy, ve kterých žák napsal k *P* a *Q* správná čísla, vylučují chybu spočívající v ignorování čísla 1 a jsou jistě zařaditelné do právě popisované kategorie chyb. Žákyně 7. ročníku ZŠ Modrá popisuje tento postup při rozhovoru:

Ž: No, to jsem si nebyla úplně jistá, tak jsem tam prostě napsala, jsem si řekla, že to *P* plus *Q* by mohlo dát to *N*. (Ukazuje *N* napsané v polovině mezi *P* a *Q*.) Že by to mohlo být někde mezi tím.

Čtyři další případy, ve kterých žák zapsal jako výsledek číslo 2 a vyznačil ho na číselnou osu do odpovídajícího bodu, řadím do této kategorie jako nejisté. Jistota zařazení do této kategorie chyb závisí na důslednosti žáků, kteří chybovali v tom, že číslo 1 považovali za počátek. Ti totiž ve shodě se svým postupem vyznačovali výsledné číslo 2 na rysku číselné osy vyznačující číslo 3. Žáci, kteří za výsledek součtu považují aritmetický průměr čísel, nemají vytvořenu představu znázornění operací na číselné ose. Je trochu překvapivé, že se těchto chyb dopouštěli i žáci ZŠ Zelená, kde se na 1. stupni k vytvoření představy o sčítání používal krokovací pás, který je také sémantickým modelem číselné osy.

V řešeních a chybách této úlohy se projevilo, že žáci neprovádějí operace přímo na číselné ose, tedy geometrickým způsobem, ale způsobem aritmetickým, jak byl popsán v tomto oddíle. Žáci, kteří se pokusili o geometrické řešení, využívali pouze chybné postupy a úlohu nevyřešili. Tedy číselná osa pro žáky nefunguje jako opora (sémantický model) operací. Také se zde ukázalo, že žáci akcentují buď geometrickou, nebo aritmetickou interpretaci číselné osy, aniž by jedno používali ke korekci při využívání druhého či tyto složky propojovali.

4.7.4 Vyhodnocení úlohy 3b 8. a 9. ročníku

Žáci, kteří došli ke správnému výsledku, že se součin T nachází mezi nulou a číslem R, ve většině případů odhadli čísla R a S, tyto hodnoty vynásobili a výsledek znázornili na číselné ose. Jako odůvodnění uváděli tento výpočet či ho ještě komentovali, že výsledek je menší než obě čísla, a proto ho umístili mezi 0 a R. Počty správných řešení jsou uvedeny v tabulce 8. Za povšimnutí stojí, že úspěšnost je ve srovnání s 23% úspěšností žáků ve výzkumu TIMSS z roku 2007 mnohem vyšší. Je možné, že je to zapříčiněno zde danou volností ve výběru číselných reprezentantů, kdežto ve výzkumu se jednalo o zlomky. (Zase zde však žák neměl možnosti odpovědí.) V mém výzkumu se pokusilo k řešení využít čísla zapsaná zlomkem 6 z 64 žáků, přičemž 3 z nich úspěšně. Všichni tři neúspěšní žáci měli problém správně provádět operace se zlomky. Sedm žáků nevědělo, jak úlohu řešit, a nechali ji (někteří s dopsanými čísly na číslené ose) nevyřešenou.

Tabulka 8: Úspěšnost žáků v řešení úlohy 3b

	ZŠ Modrá	ZŠ Zelená
8. ročník	9/22 (40,9 %)	9/23 (39,1 %)
9. ročník	8/19 (42,1 %)	-

Nejčastější chybou, díky které žákům vyšel špatný výsledek, byla chyba při zapisování desetinné čárky ve výsledném součinu. Této chyby se dopustilo 6 žáků z 8. ročníku ZŠ Modrá, kde jedna žákyně svůj výpočet $4 \cdot 6 = 2{,}4$ komentovala takto: „Když tato dvě čísla (0,4 a 0,6) vynásobíte, tak máte výsledek. Musíte si je nejdříve převést.“ Pravděpodobně použila algoritmus využívaný při dělení desetinných čísel. Ve stejném ročníku na ZŠ Zelená tuto chybu udělali pouze 2 žáci. V 9. ročníku na ZŠ Modrá takto chybovali 4 žáci, z čehož jeden možná reflektoval chybu ve výsledku, protože výpočet přeškrtnul, ale nenahradil ho lepším řešením. Čtyři žáci špatně určili čísla R a S jako větší než 1.

Mezi správnými řešeními lze nalézt několik, která poukazují na žákův vhled do situace. Žák 8. ročníku (ZŠ Modrá), který udělal chybu v násobení a vyšlo mu, že $0{,}5 \cdot 0{,}7 = 5{,}35$, tuto svou chybu reflektoval. Napsal: „Špatně jsem to vypočítal, nevím.“ a se slovy „tip“ umístil T správně mezi nulu a R. A jiný žák z této třídy odůvodnil slovně svůj správný výsledek zapsaný zlomkem, že „$R \cdot S$ jsou malá čísla, tudíž výsledek T musí být menší.“ Ostatní zdůvodňovali pouze odhad čísel R a S a jeden žák měl pravděpodobně vhled do situace a správně umístil číslo T, přičemž k jeho hodnotě 0,3 dopsal, že ji tipoval.

U dvou žáků lze sledovat, jak se vyrovnávali s výsledkem menším než R a S, který neočekávali. Jeden žák z 8. ročníku součin dvou čísel vypočítal správně, ale výpočet přeškrtl a nepovažoval ho, pravděpodobně kvůli výsledku, za správný. Druhý žák z 9. ročníku volil postup ověřování tohoto překvapivého výsledku na dalších dvojicích čísel podobných hodnot a uvěřil, že součin dvou čísel může vyjít ještě menší než oba činitele. Jasná představa žákyně 8. ročníku (ZŠ Modrá) o zvětšování se čísla násobením a tento jediný zaznamenaný pokus o zcela nesprávné, ale geometrické řešení úlohy, vyplynuly z následujícího rozhovoru:

Ž: No, já jsem, jakoby to R a S jsem, jakoby udělala dvakrát, jako jednou a podruhý. (Ukazuje na ose, že za S nanesla dvakrát vzdálenost bodů R a S.)

T: A proč zrovna dvakrát?

Ž: Nevím.

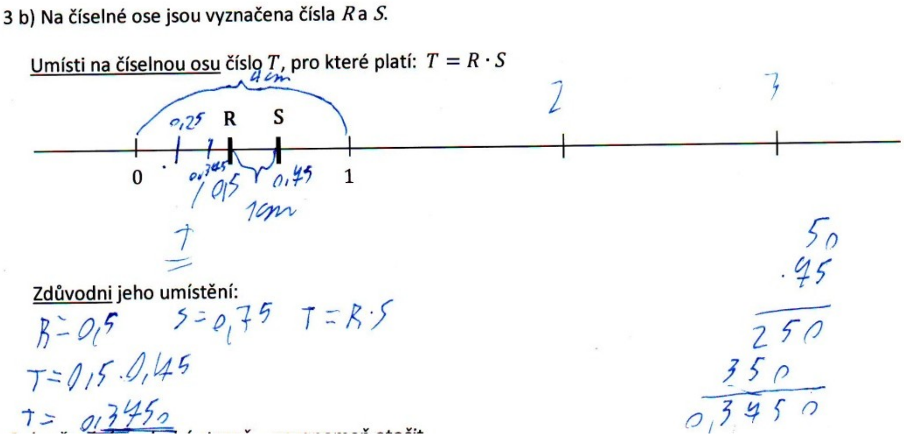
Dále žákyně mluvila o pravidle, že se čísla násobením budou vždy zvětšovat. A po vyřešení tazatelkou zadané úlohy, kolik je $2 \cdot 0{,}5$, zhodnotila:

Ž: No, tak je to jedna, jakoby záleží, jaký to jsou čísla.

T: No, a tady máme jaká čísla? Na čem tedy záleží?

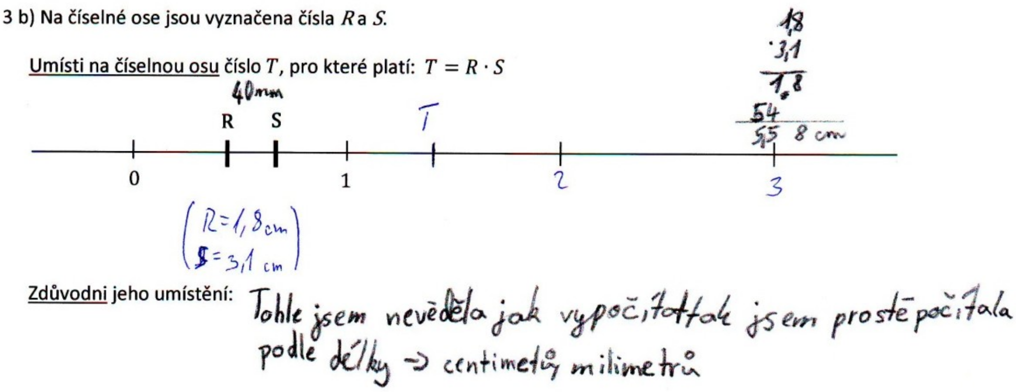
Ž: No, tak jestli to jsou desetinný, nebo normální.

V řešeních několika žáků se objevilo používání spojitosti s jednotkami délky. Na obrázku 63 je řešení žáka, který si jimi správným způsobem vypomohl při určení hodnoty čísel *R* a *S*.



Obr. 63 Řešení úlohy 3b žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Oproti tomu autorka řešení úlohy na obrázku 64 se k jednotkám míry uchýlila, protože nevěděla, jak jinak úlohu řešit. Její výsledek není správný, protože jednotka v této úloze byla zvolena tak, aby neodpovídala 1 cm.



Obr. 64 Řešení úlohy 3b žákyně 8. roč. (ZŠ Modrá)

Ojediněle se objevily výsledky, kde bylo dopsáno odůvodnění, že to žák tipoval, a to: dvakrát číslo 3, jednou číslo 2, třikrát číslo 1 a jednou bylo dopsáno, že se *T* nachází mezi *R* a *S*.

V této úloze se ukázalo, že žáci ji ve většině případů rozložili na několik jednotlivých úkonů: přečíst hodnoty čísel *R* a *S*, vynásobit je mezi sebou a poté výsledek znázornit na číselné ose. Mnozí nepoznali, že jim vycházejí nesmyslné výsledky, a celkový vhled do situace mělo jen několik žáků. Pouze žákyně, s níž byl veden rozhovor zmíněný výše, se snažila řešit tuto úlohu (sice nesprávně) geometricky. Žádný další z žáků se nepokusil znázorňit násobení na číselné ose. Oproti předchozím úlohám se však našli žáci, kteří při řešení použili úspěšně zlomky.

4.7.5 Vyhodnocení 4. úlohy

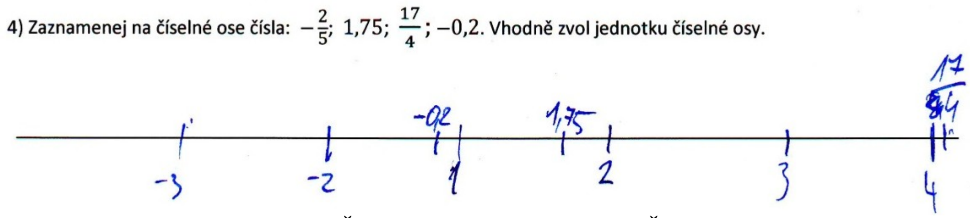
Tato úloha se vyhodnocovala obtížněji, protože žáci měli značnou volnost ve znázornění výsledku. Za chybu jsem nepovažovala, když žák evidentně z nepozornosti zapomněl u jednoho čísla znaménko a znázornil ho jako číslo opačné. Také pro číslo $\frac{17}{4}$ jsem brala toleranci umístění

$\pm\frac{1}{4}$. V tabulce 9 je zapsáno, kolik žáků tuto úlohu neřešilo, protože nevědělo jak, a počet zcela, či částečně správných řešení. Pod označením „správné umístění“ se nachází počet těch žáků, kteří na číselnou osu zaznamenali čísla na správná místa ve zvoleném měřítku. Všichni žáci (včetně posledně jmenovaných), kteří zapsali na číselnou osu čísla správně podle jejich uspořádání, byli započítáni do kategorie „správné uspořádání“.

Tabulka 9: Výsledky 4. úlohy

	ZŠ Modrá			ZŠ Zelená		
	neví	správné umístění	správné uspořádání	neví	správné umístění	správné uspořádání
6. ročník	2	1/19	2/19 (10,5 %)	4	4/27	12/27 (44,4 %)
7. ročník	0	6/20	10/20 (50,0 %)	6	5/26	8/26 (30,8 %)
8. ročník	0	9/22	14/22 (63,66 %)	3	7/23	10/23 (43,5 %)
9. ročník	1	6/19	11/19 (57 ,9 %)	-	-	-

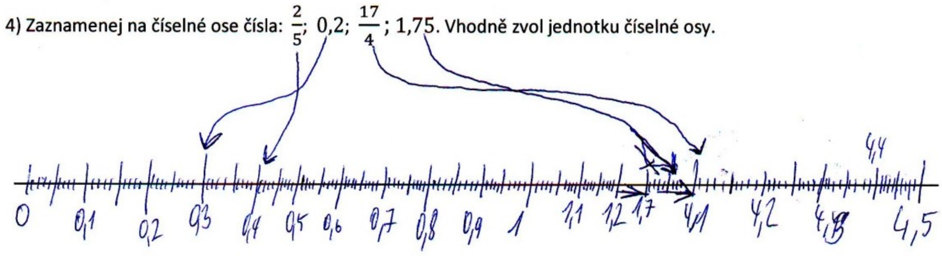
U rozvržení čísel na číselné ose v testu pro 6. a 7. ročník jsem sledovala, zda si žák vyznačil na číselné ose, která měla zobrazovat pouze kladná čísla, nulu. Mnoho žáků postupovalo tak, že pouze porovnalo zadaná čísla, aniž by se snažili postihnout jejich vzájemnou vzdálenost na ose. Proto číselné osy těchto žáků často neobsahovaly číslo 0. Většinu však tvoří 53 žáků, jejichž číselná osa nulou začíná, oproti 24 žákům, kteří ji nevyznačili. Dva žáci umístili číslo 0 doprostřed. Jeden napsal správně zleva čísla záporná, kdežto druhý čísla kladná souměrně podle 0 (a to přestože ještě záporná čísla neprobírali). Jeden žák místo nuly napsal „začátek“. U testu pro 8. a 9. ročník mě zajímalo, zda žák začne vyznačením nuly uprostřed, jak by byl zvyklý z učebnic, nebo zjistí, že v mínusových hodnotách mu stačí prostor velmi malý, a to do čísla –0,4, kdežto pro kladná čísla potřebuje znázornit až číslo 4,25. V 8. ročníku číslo 0 umístila většina žáků (30) do středu, pouze 8 žáků ji volilo napravo a 4 žáci ji na ose v řadě celých čísel vynechali (viz obr. 65). V 9. ročníku je stejný počet (7) těch, kteří ji umístili více nalevo, jako těch, kteří ji umístili do středu; 5 žáků nulu na své číselné ose nezaznamenalo. Zbytek žáků v těchto ročnících buď úlohu neřešil, nebo žáci na ose zaznamenali pouze pořadí čísel podle velikosti a k tomu 0 nepotřebovali.



Obr. 65 Řešení 4. úlohy žáka 9. roč. (ZŠ Modrá)

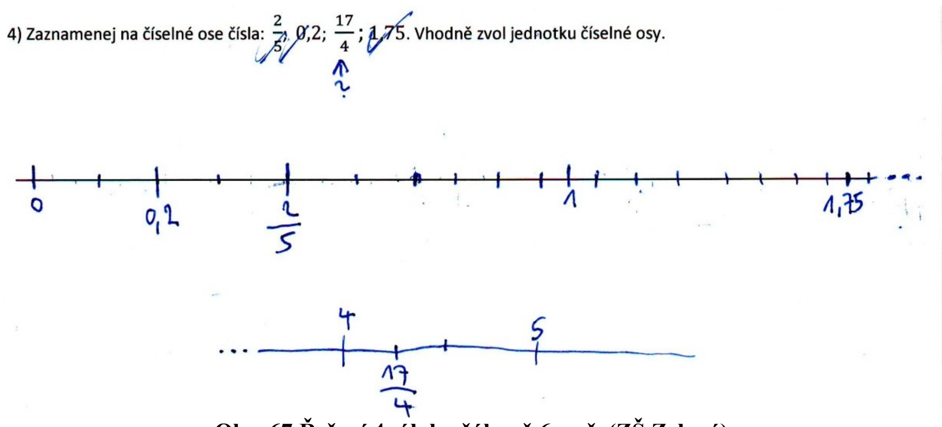
Při volbě dělení osy se projevily značné rozdíly mezi žáky různých ročníků. V 6. ročníku žáci dělili osu tak, aby číslům, která zapisují, odpovídala některá z jimi vyznačených rysek, či bylo číslo rysce velmi blízké. Osu na pravidelné dílky dělilo 35 ze 40 žáků, kteří úlohu řešili. Z těchto žáků jich 11 jednotku dělilo na desetiny a 1 žák ji dělil na setiny (obr. 66). Na dílky velké 0,5 či 0,25 ji dělilo 6 žáků a jeden ji dělil na dílky velké 0,2. Tedy na menší dílky osu dělilo 19 z 35 žáků 6. ročníku. Celkem 13 žáků vyznačilo čísla přirozená a 3 použili jednotku délky. Oproti tomu žáci 7.–9. ročníků buď osu nedělili vůbec (34 žáků ze 100), nebo ji dělili převážně dvěma způsoby, a to po přirozených či celých číslech, nebo využili jednotky délky. Jemnější dělení převážně některých konkrétních intervalů se sice objevuje, ale v mnohem menší míře (21 z 66 žáků, kteří osu dělili). Délku centimetru pro vyznačení celých čísel (výjimečně desetin) použili převážně žáci 7. ročníku, kde ji evidentně použilo 8 žáků (ze 40, kteří úlohu řešili). Tak, že by to z testu bylo zřejmé, ji v 8. ročníku použili dva žáci a v 9. žádný.

Z toho, jak žák volil jednotku a jak byl schopen předvídat, kterou část číselné osy využije pro zaznamenání daných čísel, vyplývá jeho rozvržení čísel na číselné ose. Žáci volili různá řešení vzniklé neočekávané situace, kdy dané parametry špatně odhadli. Někteří žáci, mezi něž patří ti, kteří volili jednotku 1 cm, nevyužili celou délku osy. Jejich řešení bylo menší, než bylo nutné, a tedy v některých případech byla znázorněná čísla nahuštěná velmi blízko sebe. Druhou skupinou jsou žáci, kteří se díky špatně zvolené velikosti jednotky či volbě umístění 0 na předtištěnou osu nevešli. Tento problém řešili různými způsoby. Žák, jehož řešení je na obrázku 66, jisté části číselné osy (např. od 1,2 do 1,7) vynechal, aby se mu daná čísla na předtištěnou osu vešla.



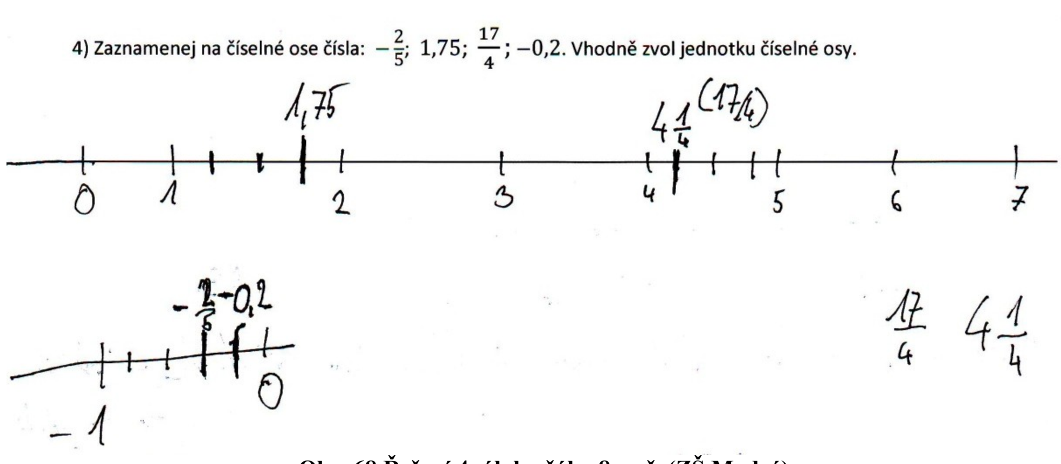
Obr. 66 Řešení 4. úlohy žáka 6. roč. (ZŠ Modrá)

Dalším způsobem, jak si žáci s touto situací poradili, bylo prodloužení číselné osy pod předtištěnou osu. V některých případech žák také část osy vynechal (obr. 67).



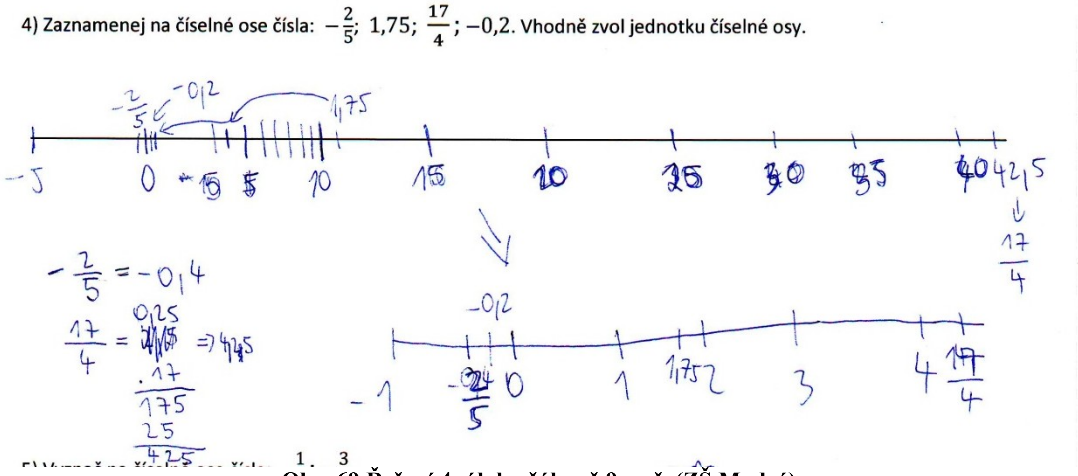
Obr. 67 Řešení 4. úlohy žákyně 6. roč. (ZŠ Zelená)

Žák, jehož řešení je na obrázku 68, začal nevhodně znázorňovat kladnou část číselné osy a až během řešení zjistil, že potřebuje i její zápornou část. Byl tedy nucen znázornit tuto část také pod předtištěnou osu.



Obr. 68 Řešení 4. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

Poslední způsob řešení tohoto problému, který se v testech objevil pouze u dvou žáků 9. ročníku (obr. 69), je nakreslení celé nové číselné osy.



Obr. 69 Řešení 4. úlohy žákyně 9. roč. (ZŠ Modrá)

Problém špatného rozvržení číselné osy nevznikl u žáků, kteří čísla pouze seřadili vzestupně a nerespektovali jejich velikost. Ti, kteří určili číslo $\frac{17}{4}$ jako největší, ho často jednoduše umístili na konec přímky a neřešili, jak daleko od nuly v porovnání s ostatními čísly má být.

Dále se ukázalo několik odlišností z hlediska práce s desetinnými čísly a se zlomky v jednotlivých ročnících. V 6. ročníku byl obecně problém s čísly ve zlomku. Projevil se zde však velký rozdíl mezi školami (přestože v obou jsou v 6. ročníku probírána desetinná čísla a v 7. zlomky). Na ZŠ Modrá si žáci neuměli, až na dvě výjimky, poradit ani s jedním ze zadaných zlomků. Dopisovali, že nevědí, co s těmi zlomky, a že je neumí převést na desetinná čísla. Celkem 8 z 15 žáků, kteří si neporadili ani s jedním zlomkem, a úlohu řešili, interpretovali zlomek jako jinak zapsané desetinné číslo, tedy že platí $\frac{2}{5} = 2{,}5$ a $\frac{17}{4} = 17{,}4$, což značně prodlužovalo část osy, kterou ke znázornění potřebovali. Oproti tomu na ZŠ Zelená v tomto ročníku úspěšně zapsalo alespoň jeden zlomek 17 žáků z 23, kteří úlohu řešili. Tito žáci častěji dělali chybu v umístění $\frac{2}{5}$ (13krát) než $\frac{17}{4}$ (10krát). Na rozdíl od většiny žáků ze ZŠ Modrá žáci pracovali i se zlomky, aniž by je vždy převáděli (nebo chtěli převádět) na desetinná čísla. Ti žáci 7. a 8. ročníku, kteří převáděli zadaná čísla tak, aby měli všechna vyjádřena zlomkem, nebo všechna desetinným číslem, byli v řešení úspěšnější než žáci, v jejichž řešení žádné převody zaznamenány nebyly. Až na výjimku 7. ročníku ZŠ Zelená převládly převody zlomků na desetinná čísla. V 7. ročníku ZŠ Modrá téměř platí, že úspěšně seřadil daná čísla ten, kdo si uměl převést zlomky na desetinná čísla. Ke změně dochází v 9. ročníku, kde se žáci téměř nesnažili čísla převádět, což může způsobovat nižší přesnost v zápise na číselnou osu. Ve dvou případech žák úspěšně převedl desetinná čísla na zlomky, ale na osu je, jak píše, už neuměl zaznamenat.

U této úlohy se ukázalo, že žáci mají obtíže znázornit si vhodnou část číselné osy, kterou k práci potřebují, a zaznamenat čísla přesně, ne je pouze seřadit od nejmenšího po největší. Žáci umí zapisovat desetinná čísla na číselnou osu mnohem lépe než zlomky. Vhled do systému zlomků bylo vidět v testech ZŠ Zelená ve větší míře než na ZŠ Modrá. Ve více testech chybělo zapsání zlomku většího než jedna ($\frac{17}{4}$) na číselnou osu a jeden žák 7. ročníku ZŠ Modrá dokonce, když viděl v zadání zlomek, označil začátek znázorněné osy číslem 0 a konec číslem 1. Nepředpokládal, že by mohl být některý zlomek větší než 1. Je vidět, že se zlomky většími než 1 se žáci nesetkávají rozhodně tak často, jako s těmi menšími než 1. Neukázalo se, že by však žáci byli úspěšnější při zapisování zlomku $\frac{2}{5}$ na číselnou osu, ačkoliv je menší než 1, protože se dopouštěli mnohých početních chyb při převodech či chyb plynoucích z nepochopení zlomků.

4.7.6 Vyhodnocení 5. úlohy

V této úloze jsem hodnotila, jestli žák správně uspořádal daná čísla a především, jak postupoval při jejich umisťování. Tabulka 10 ukazuje počet žáků, kteří správně porovnali daná čísla nezávisle na správných či špatných postupech (podrobněji níže). Také ukazuje, kolik žáků zaznamenalo čísla na správné místo na číselné ose. Přitom jsem hlídala, aby $\frac{1}{4}$ byla zaznamenána jako menší než $\frac{1}{3}$ a větší než $\frac{1}{6}$, protože nepovažuji za správný výsledek zaznamenat $\frac{1}{4}$ v místě $\frac{1}{4}$ ze $\frac{2}{3}$. Číslo $\frac{3}{2}$ jsem považovala za správné, pokud bylo větší než 1 a menší než 2. Obdobné vzdálenosti platily u záporných čísel. V některých případech byl zřejmý postup žáka, který jasně vypovídal o vhledu do situace. Ten jsem počítala vždy za správný, přestože žákův náčrtek nebyl vždy přesný.

Tabulka 10: Řešení 5. úlohy

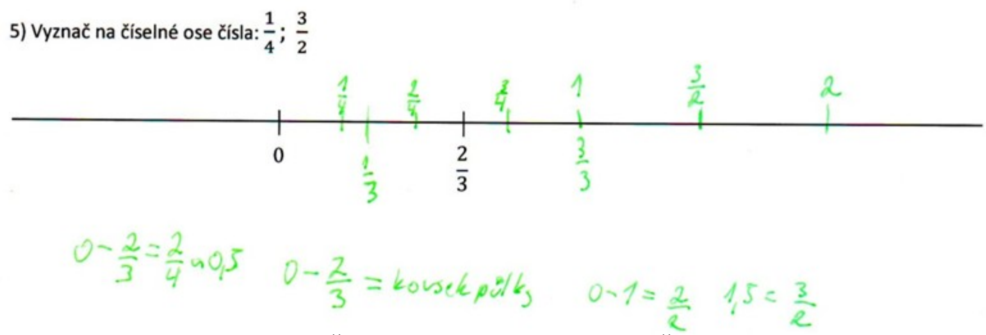
	ZŠ Modrá			ZŠ Zelená		
	neví	správné umístění	správné uspořádání	neví	správné umístění	správné uspořádání
6. ročník	2	1/19	10/19 (52,6 %)	6	7/27	15/27 (55,6 %)
7. ročník	0	8/20	15/20 (75,0 %)	2	8/26	20/26 (76,9 %)
8. ročník	1	9/22	18/22 (81,8 %)	2	2/23	12/23 (52,2 %)
9. ročník	1	7/19	14/19 (73,7 %)	-	-	-

V řešení této úlohy se objevily tři základní přístupy: zapsání zadaných čísel bez jakéhokoliv náznaku postupu pro jejich porovnání či umístění, snaha využít pro řešení desetinná čísla nebo využít zlomky (viz tab. 11). Mnoho žáků tuto úlohu pojalo pouze jako úkol čísla porovnat, a proto se nesnažili o jejich přesnější umístění, které bylo požadováno. Přestože je snazší řešit úlohu pomocí zlomků, značná část žáků (25) se snažila si pomoci desetinnými čísly, protože se zlomky na číselné ose si poradit neuměla.

Tabulka 11: Použití zlomků a desetinných čísel pro řešení 5. úlohy

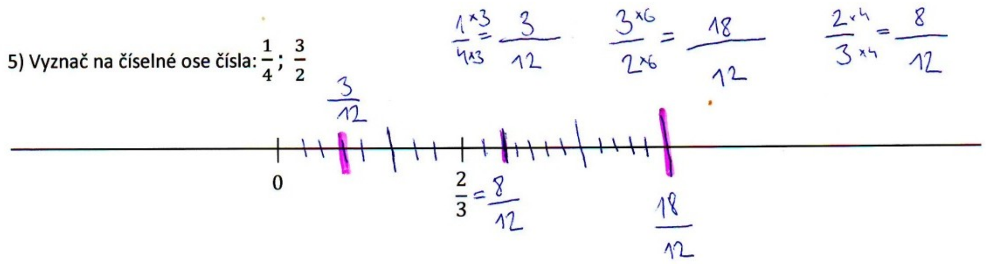
	6. ročník	7. ročník	8. ročník	9. ročník
zlomky: ZŠ Zelená	6/27	9/26	3/23	-
ZŠ Modrá	2/19	9/20	7/22	6/19
desetinná čís.: ZŠ Zelená	1/27	1/26	7/23	-
ZŠ Modrá	7/19	4/20	4/22	1/19

Nejjednodušší a nejpřesnější způsob řešení pomocí zlomků, jehož základ je patrný z obrázku 70, se dal nalézt (či jeho značná část) ve 26 správných řešeních a dalších 5, která nebyla správná. Několik žáků zvolilo řešení úlohy pomocí zlomků tehdy, když zjistilo, že jim po převedení čísla $\frac{2}{3}$ vychází číslo periodické.



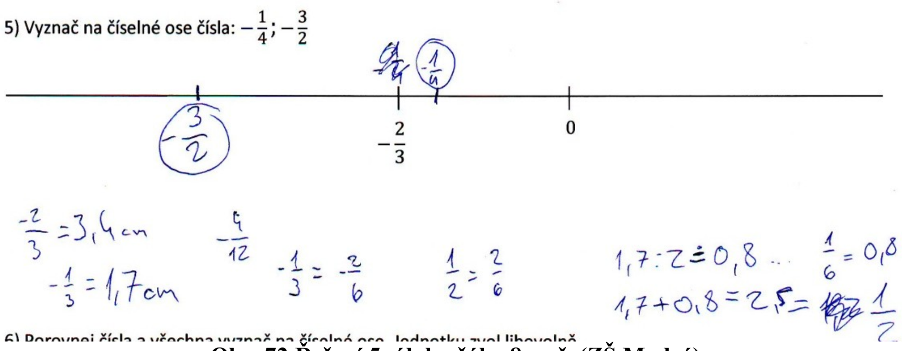
Obr. 70 Řešení 5. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Zelená)

Ze 42 žáků, kteří k řešení zlomky využívali, jich 5 postupovalo převodem zadaných čísel na společného jmenovatele. Jeden z postupů tří žáků, který nevyužívá převedení na společného jmenovatele pouze pro porovnání čísel, ale také pro jejich správné umístění, je na obrázku 71.



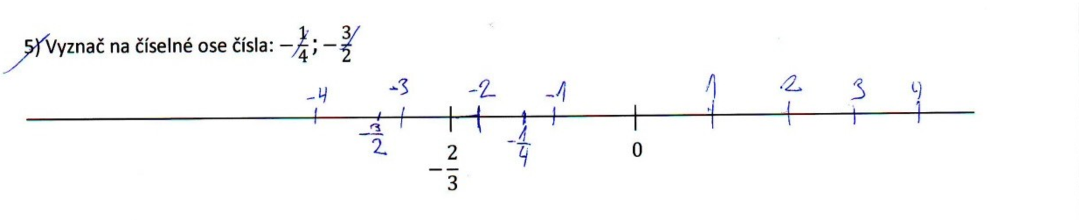
Obr. 71 Řešení 5. úlohy žákyně 7. roč. (ZŠ Modrá)

Ani jeden z 5 žáků 7. a 8. ročníku, kteří si převedli postup vyznačování dílků na číselné ose na vyčíslování vzdálenosti těchto čísel od počátku v centimetrech, nedospěl kvůli chybám při výpočtech ke správnému řešení. Z tohoto postupu (obr. 72) je vidět, že žáci více věří svým výpočtům, ve kterých chybují, než půlení a nanášení dílků dané velikosti na číselnou osu. Také výskyt tohoto postupu odkazuje na silné propojení jednotky číselné osy s jednotkami délky. Zajímavé je, že v každé z úloh jsou to jiní žáci, kteří spojují centimetry s číselnou osou ve svém testu.



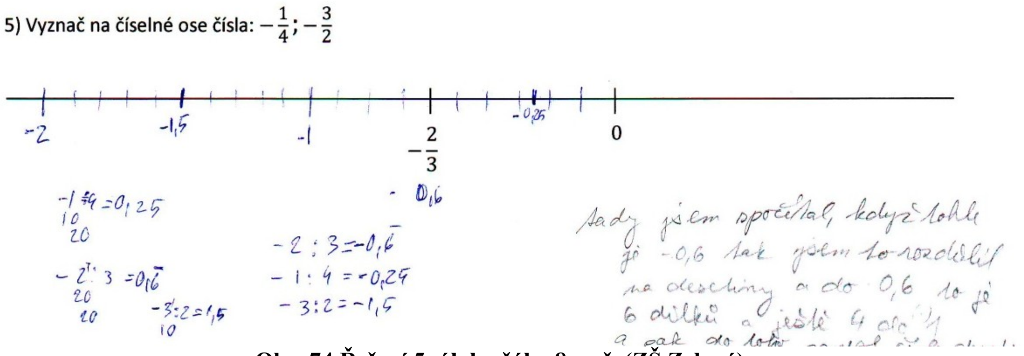
Obr. 72 Řešení 5. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

Z 25 žáků, kteří se snažili řešit úlohu převedením zlomků na desetinná čísla, tento postup pomohl ke správnému řešení, tj. umístění čísel na osu, 6 žákům. V 6. ročníku na ZŠ Modrá nedospěl pomocí desetinných čísel ke správnému řešení ani jeden žák, což vychází z nepochopení zlomků v tomto ročníku, jak je zřejmé již z předchozích úloh. Toto tvrzení se nedá zobecnit na celý 6. ročník, protože na ZŠ Zelená využil desetinná čísla jeden žák, který si převedl pouze zlomek $\frac{3}{2}$ na desetinné číslo. (Ostatně stejné využití desetinných čísel v této úloze je na této škole i v 7. ročníku.) Chyba v chápání zlomků hojná v 6. ročníku ZŠ Modrá se však na této škole vyskytla i např. v 8. ročníku (viz obr. 73), kdy žáci chápou desetinnou čárku i zlomkovou čáru jako oddělení dvou čísel různých řádů. Dávají tedy například rovnost mezi číslo 3,2 a $\frac{3}{2}$, jak bylo uvedeno již v úlohách výše.



Obr. 73 Řešení 5. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

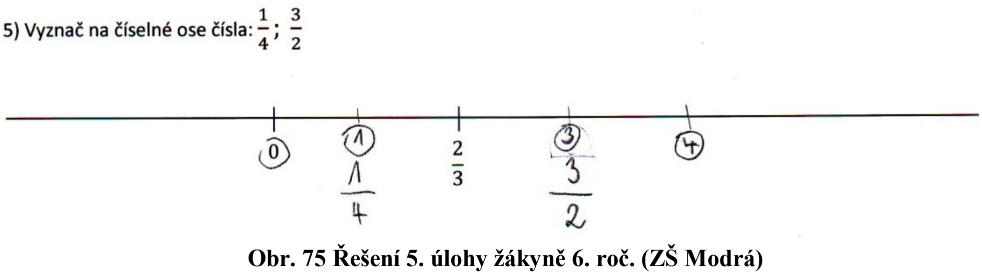
Další postup využívající desetinná čísla spočíval v tom, že žák po převodu zlomků na desetinná čísla vyznačil (často nepřesně) na číselné ose číslo 0,5. Podle něj potom odhadl umístění čísla 1 a dále umístil zadaná čísla, přičemž si často neuvědomil, že vyznačovaná $\frac{1}{4}$ je v polovině čísla 0,5. Někteří však převedení na desetinná čísla využili pouze ke správnému porovnání čísel, aniž by se je snažili umístit na číselnou osu na správnou pozici. Pouze jeden žák, který pracoval s desetinným vyjádřením čísel, se snažil o větší přesnost zaznamenání čísel. Ačkoliv se dopustil nepřesnosti, když periodické číslo $0,\overline{6}$ začal psát bez periody, což mu umožnilo počítat s rozdělením jednotky na deset dílků (obr. 74).



Obr. 74 Řešení 5. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Zelená)

Ojedinělé (2) chyby udělali žáci při snaze nejen čísla porovnat, ale také je správně umístit, ale pouze vzhledem k jednomu ze dvou předtištěných čísel. V jednom případě nebral žák ohled na nulu a v druhém případě si sám doplnil dělení osy na desetiny, aniž by ho zajímalo vyznačené číslo $\frac{2}{3}$.

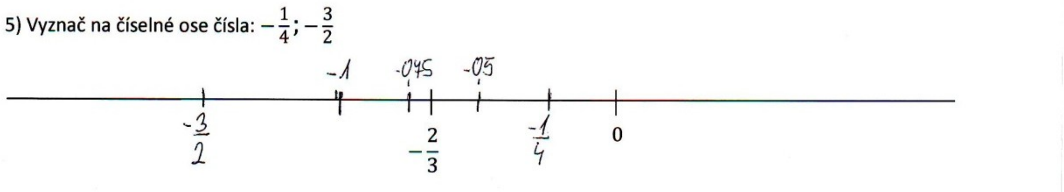
V této úloze se ukázalo, aniž to bylo záměrné, že zadané zlomky umožňovaly i postup řešení, který vedl ke správnému porovnání čísel, ale byl vyloženě nesprávný. Tento postup znázorněný na obrázku 75 spočíval v tom, že žák ztotožnil čitatele zlomku s přirozenými či celými čísly a ta porovnal. Tento postup je doložitelný ze dvou testů (v obou třídách 6. ročníku), je však možné, že byl aplikován i tam, kde to z testu vidět není, což usuzuji z rozhovoru, v němž tento postup žákyně 6. ročníku ZŠ Modrá popisuje.



Obr. 75 Řešení 5. úlohy žákyně 6. roč. (ZŠ Modrá)

Ze třech rozhovorů (a nejednoznačně také z mnohých testů) se dá také usuzovat, že žák nedělil pro umístění čísla $\frac{1}{4}$ jednotku, ale dílek odpovídající velikosti $\frac{2}{3}$. Rozložení zaznamenaných čísel, jako je na obrázku 75, vypovídá v mnoha testech o tom, že žák jen porovnával daná čísla. Tento velmi častý postup může být způsoben častým výskytem číselné osy v učebnicích v kapitolách věnujících se porovnávání čísel, kde se číselná osa jako prostředek porovnání používá a kde není cílem zapsat čísla na osu správně, ale správně je porovnat.

Poslední postup (viz obr. 76) se vyskytl u čtyř žáků. Je možné, že žáci nepřesně umístili číslo 1 (resp. -1) a poté ho dělili na čtvrtiny. Druhá možnost je, že si podle čísla $\frac{2}{3}$ nepřesně vyznačili číslo 0,75 (zlomkem nebo desetinným číslem) a podle něj vyznačili čísla 1 a 0,5. Který z těchto postupů žák volil, není z testů zřejmé.

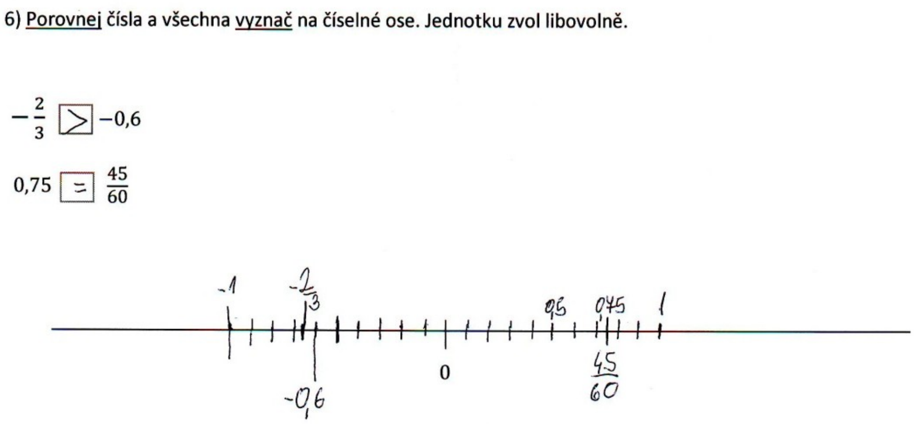


Obr. 76 Řešení 5. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

Chyby nesprávného porovnání záporných čísel se dopustilo pět žáků z 8. a 9. ročníku. Většina chyb spočívala v tom, že se žáci nesnažili zaznamenat čísla přesně a chtěli je jen porovnat, dále v mezivýpočtech, v chybném chápání čísel a v nezvyklosti používat číselnou osu.

4.7.7 Vyhodnocení 6. úlohy

V úloze se v řešeních projevil velký nesoulad mezi zapsanými znaménky v nerovnostech a uspořádáním čísel na číselné ose. Přestože je v učebnicích číselná osa využívána k porovnávání čísel, někdy jako pomoc pro porovnávání a někdy jako kontrola, z řešení žáků je vidět, že číselnou osu žáci nepoužívají jako model, z kterého by vycházel jejich správný zápis nerovností. Jak je vidět v tabulce 12, správně zaznamenalo na číselnou osu čísla i napsalo nerovnosti pouze 37 ze 156 žáků, a to ještě z těchto testů není zřejmé, zda opravdu zaznamenání čísel na číselnou osu vedlo ke správnému porovnání, nebo proces probíhal opačně. Z tabulky je také vidět, že žáci, kteří nenapsali znaménka správně v obou nerovnostech, při zapisování nerovností nevycházeli ze znázornění daných čísel na číselné ose a ani je s ní nekorigovali. Dokonce 9 žáků znázornilo čísla na číselnou osu správně, ale nerovnosti zapsali špatně. Zde by se mohlo namítnout, že to může být v 8. a 9. ročníku způsobeno špatnou interpretací velikosti čísel v záporné oblasti. To je sice do jisté míry pravda, v 17 případech k tomu pravděpodobně došlo, avšak z toho v 7 případech tato chyba anulovala chybu špatného uspořádání čísel na ose (ve dvou případech jde o test s oběma správnými nerovnostmi). Kdyby se 5 žáků této chyby nedopustilo (viz obr. 77), byla by jejich řešení zcela správná.



Obr. 77 Řešení 6. úlohy žáka 8. roč. (ZŠ Modrá)

Celkově tedy, kdyby se této chyby žáci nedopustili a vycházeli by pro zapsání nerovností z umístění čísel na ose, výsledky by se ještě zhoršily. Nelze tedy říci, že by špatných výsledků žáci 8. a 9. ročníku dosáhli kvůli této chybě. Je možné, že špatné výsledky žáků 8. a 9. ročníku souvisí s tím, že jak práce na číselné ose, tak porovnávání čísel se vyskytuje v učebnicích pro nižší ročníky. Žáci si často převedli zlomky či desetinná čísla do jiné reprezentace, avšak značné části žáků, jak také potvrzuje rozhovor s žákyní 8. ročníku ZŠ Modrá, to nepomohlo, protože nevolili reprezentace, s nimiž by uměli pracovat.

T: Jaks tady zjišťovala, že je jedno větší než druhé?

Ž: Jsem to 0,75 převedla na zlomek. ($\frac{75}{100}$)

T: A jaks poznala, že je tenhle zlomek $\frac{75}{100}$ větší než tenhle ($\frac{45}{60}$)?

Ž: Nevím, já jsem si to tipla.

Chybné chápání zlomků žáků 6. ročníku ZŠ Modrá, které se projevilo již v předchozích úlohách, koresponduje (viz tabulka 12) s malým počtem správných umístění čísel na číselné ose a s větším počtem testů, ve kterých odpovídá umístění čísel na číselné ose zapsaným nerovnostem.

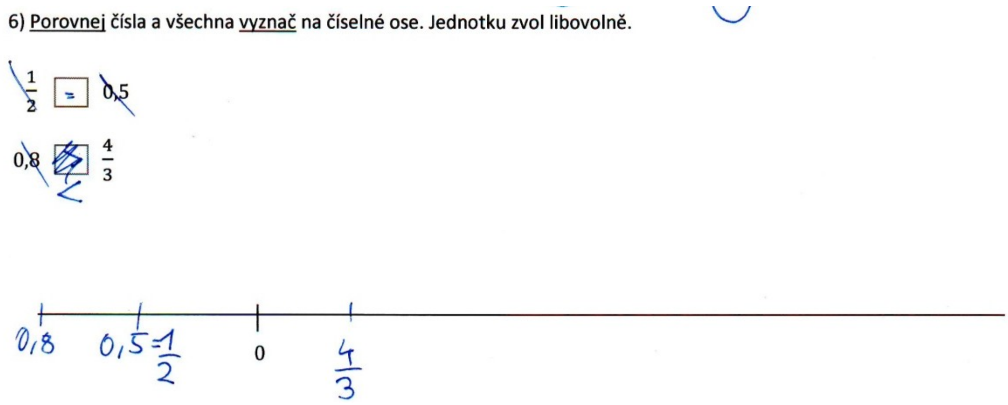
Tabulka 12: Počty správných odpovědí a vyznačení na číselné ose v 6. úloze

	obě správné	správná vyznačení na ose pro obě správné odpovědi		jedna správná	žádná správná	vyznačení na ose odpovídá (nesprávné) odpovědi[27]	neví
		umístění	uspořádání (pouze uspořádání)				
6. ročník: ZŠ Modrá	5/19 (26,3 %)	1 (5,3 %)	3 (2)	12	2	9	0
6. ročník: ZŠ Zelená	20/27 (74,1 %)	11 (40,7 %)	18 (7)	5	1	0	1
7. ročník: ZŠ Modrá	16/20 (80,0 %)	8 (40,0 %)	12 (4)	3	1	2	0
7. ročník: ZŠ Zelená	19/26 (73,1 %)	10 (38,5 %)	15 (5)	5	2	0	0
8. ročník: ZŠ Modrá	3/22 (13,6 %)	1 (4,5 %)	2 (1)	16	2	6	1
8. ročník: ZŠ Zelená	2/23 (8,7 %)	0 (0 %)	0 (0)	10	11	6	0
9. ročník: ZŠ Modrá	7/19 (36,8 %)	6 (31,6 %)	6 (0)	8	4	5	0
celkem	72/156 (46,2 %)	37 (23,7 %)	56 (16)	82 (52,6 %)		28 (17,9 %)	

V této úloze opět docházelo k chybám při převodech na desetinná čísla a někdy při převodu na zlomky. Častější chybou tohoto charakteru bylo zapsání čísla $0,\overline{6}$ bez periody, což se pak rovnalo zadanému číslu 0,6. Z dalších chyb, které se vyskytly, jmenuji například zaznamenání zlomku na osu na místo odpovídající číslu čitatele, nebo na místo odpovídající desetinnému číslu, které žák vytvořil z číslic zlomku. Jeden žák vnímal velikost čísel na číselné ose obráceně, tedy čím dál bylo kladné číslo od nuly, tím ho považoval za menší. Další dva žáci (7. a 9. ročníku) si zapsali kladná čísla napravo i nalevo od nuly (viz obr. 78) a jeden žák znázornil záporná čísla vpravo a kladná vlevo, tedy obráceně, než je zvykem, přičemž je ale porovnával správně. Jeden žák do okének pro znaménka nerovností vepsal plus a mínus a tři

[27] V 7 případech z jejich celkového počtu se tato korespondence týkala dvou rovností.

žáci napsali poznámku, že nevědí, co se myslí jednotkou v zadání, proto jeden žák ke všem číslům dopsal jednotku $\frac{J}{kg \cdot °C}$ a možná i proto tři žáci zapisovali centimetry či psali, kolika centimetrům či milimetrům odpovídá jeden jejich vyznačený dílek.



Obr. 78 Řešení 6. úlohy žáka 7. roč. (ZŠ Modrá)

V této úloze tedy vyšlo najevo, že žáci číselnou osu nevyužívají jako podporu či kontrolu pro porovnávání čísel. Žáci více věří výpočtům než svému znázornění čísel na ose. To může být způsobeno především neschopností mnoha žáků s jistotou umístit na číselnou osu zlomky. O tomto faktu se v testech vyjadřuje více žáků a jedna žákyně 7. ročníku píše: „Promiňte, že jsem toho tolik nevyplnila. [...] Možná, kdyby se nemusela (čísla) zakreslovat, zvládla bych toho víc. Počítání je jednoduché, ale v těch osách mám teď hrozný zmatek.“ To ukazuje na to, že je práce na číselné ose pro žáka neobvyklá a zdaleka pro něj není číselná osa generickým modelem jemu známých čísel.

5 Závěr: Shrnutí výsledků a didaktická doporučení

V práci jsem se prostřednictvím analýzy učebnic a vlastního výzkumného šetření soustředila na tyto otázky:

Jakých chyb se žáci dopouštějí při práci na číselné ose? Mají tyto chyby spojitost s obsahem učebnic? Je rozdíl v úspěšnosti řešení úloh mezi školami, který by mohl vyplývat také z užívání odlišných učebnic?

Na základě analýzy učebnic, ve které jsem zjistila, že většina učebnic nepropojuje na číselné ose zlomky a desetinná čísla, ačkoliv je právě tato možnost velkou výhodou číselné osy, byla mezi otázky zařazena i následující:

Existují rozdíly ve schopnosti žáků pracovat na číselné ose se zlomky a desetinnými čísly?

V úlohách, které jsem pro výzkumné šetření sestavila, se projevilo, že práce na číselné ose je pro žáky nezvyklá, nezávisle na tom, jak jsou v matematice celkově úspěšní. (Úspěšnost a neúspěšnost v řešení úloh nevykazovala žádnou spojitost s žákem uvedenou známkou na posledním vysvědčení.) Také nelze žáky podle testů rozdělit na úspěšné a neúspěšné řešitele, protože ti, kteří byli v některé úloze neúspěšní, vyřešili některou jinou.

Přestože typová zadání úloh v učebnicích vyžadují přesnost umístění čísel (možná s výjimkou úloh, ve kterých má žák použít číselnou osu pouze ke kontrole porovnávání), mnoho žáků ve 4.–6. úloze umísťovalo čísla na číselnou osu nepřesně pouze podle jejich uspořádání. Tito žáci se vyhnuli mnoha chybám, ke kterým by měli příležitost při snaze zaznamenat čísla přesně. Z tohoto jevu, konkrétně z řešení 6. úlohy, kde v mnoha případech neodpovídala číselná osa doplněným nerovnostem, a z mechanicky zaznamenaných výsledků na nelogická místa číselné osy ve 3. úloze, je zřejmé, že žáci chápou práci s číselnou osou pouze jako jednu z množství různých úloh (tedy jako cíl) a není pro ně oporou pro řešení úloh, nástrojem rovnocenným s výpočty a používaným k jejich kontrole či modelem pro chápání čísel či operací s nimi (tedy jako prostředek). O tom, že žáci nevědí, jak lze provádět operace na číselné ose, svědčí fakt, že ti, kteří se snažili v úloze 3a znázornit součet bez počítání mimo číselnou osu, nebyli úspěšní a u násobení se o to žáci (také pro obtížnost zvolených čísel) nepokoušeli.

Že není číselná osa pro žáka dost přesvědčivým nástrojem a že věří svým výpočtům víc než umístění čísla na číselné ose, může být způsobeno nejistotou žáka a nepřesností ve vyznačování čísel na číselné ose či jistou neschopností žáků zaznamenávat na číselné ose zlomky. Proto se žáci dopouštěli mnohých chyb v úlohách, kde měli pracovat jak s desetinnými čísly, tak se zlomky. Zlomky se značná část žáků snažila převést na pro ně známější desetinná čísla, a to i v 5. úloze, kde tento krok nebyl výhodný. Při těchto převodech a stejně tak při jiných výpočtech (krácení a rozšiřování zlomků, operace s desetinnými čísly a výjimečně se zlomky, výpočet čísla pomocí centimetrů, zaokrouhlování periodického čísla) se žáci dopouštěli mnoha chyb, kterých by se při práci na číselné ose, kdyby daná čísla na ní uměli zaznamenat, nedopustili.

Neschopnost žáků zaznamenávat zlomky na číselné ose a jim bližší práce na číselné ose s desetinnými čísly v zadaných úlohách ukazuje na souvislost s odpovídajícím množstvím úloh v učebnicích (viz oddíl 3.2). Jasně se ukázal mezi školami rozdíl v chápání zlomků v 6. ročníku, kde žáci na ZŠ Modrá převáděli zlomek na desetinné číslo přeskupením čísel, kdežto žáci na ZŠ Zelená chápali pojem zlomek ve většině správně. Tento velký rozdíl se projevil především v úlohách 4 až 6, kde nešlo pracovat bez chápání zlomků. V úlohách, kde žáci používali desetinná čísla, byly výkony v obou třídách vyrovnané. Celkově se ale nedá říct, že by žáci některé školy (7. a 8. ročníku) byli v úlohách obsahujících zlomky výrazně lepší. V testech žáků ZŠ Zelená byla ve větší míře zaznamenána ochota pracovat se zlomky a vhled žáků do problematiky zlomků, kdežto na ZŠ Modrá se více žáků snažilo převádět zlomky na desetinná čísla, což může poukazovat na rozdílnost použitých učebnic (popř. výuky).

V několika případech se žáci pro práci se zlomky snažili používat model koláče, který jim však dal vhled pouze do porovnání zlomků. Jak se však ukázalo během rozhovoru u jedné žákyně pracující s modelem koláče, není ani tento model žákům silnou oporou a rozhodně jim nepomohl, aby byli schopni správně znázornit čísla na číselné ose. Pokud žák se zlomky na číselné ose pracoval, objevovaly se chyby: v 5. úloze zaznamenával $\frac{1}{4}$ ne z 1, ale z vyznačených $\frac{2}{3}$, nebo především v 5. a 6. úloze chyby toho typu, že žák zapsal polovinu jako 0,5 a nevěděl, že $\frac{1}{4}$ je polovinou z 0,5, či chyby v převodu zlomků na ekvivalentní zlomky.

Při práci s desetinnými čísly měli někteří žáci problém při znázorňování periodického čísla (5. a 6. úloha), které si převedli ze zlomku. Buď psali, že nevědí, jak ho znázornit, nebo ho napsali bez periody, což jim v 6. úloze zapříčinilo špatný výsledek. Žáci se dopouštěli chyb při práci s desetinnými čísly ve 2. a 3. úloze, kdy čísla v každém intervalu mezi dvěma celými čísly nebo např. z intervalu $\langle 1; 2\rangle$ interpretovali jako čísla z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Tato chyba by mohla vycházet z typových úloh učebnic pouze v případě zlomků, které jsou často zobrazovány na jednotkovém intervalu; u desetinných čísel jsem takovouto souvislost nenašla.

Další oblastí, kterou v úlohách lze sledovat, je schopnost žáků zaznamenat čísla na osu, kde nemají vyznačenu jednotku a v jednom případě ani 0. Především ze 4. a ze 6. úlohy je zřejmé, jak žák dokáže rozvrhnout čísla na části číselné osy, kterou si sám zvolí. Většina žáků neumí rozvrhnout čísla tak, aby nebyla nahuštěna příliš u sebe, či tak, aby se jim na tuto část osy všechna vešla. Na to, že žáci nerozmýšlí dopředu, také poukazují některé chyby. Např. když žák viděl zlomky, označil začátek části osy číslem 0 a konec číslem 1; nevšiml si, že bude znázorňovat i záporná čísla, a vyznačil nulu na začátek části číselné osy; nevyznačoval sice záporná čísla, přesto si pro ně číselnou osu znázornil; za jednotku zvolil centimetr, i když bylo potřeba pro dobrou rozlišitelnost čísel zvolit větší jednotku. Žáci často nedodržují odpovídající vzdálenosti mezi čísly. Žáci (více v nižších ročnících) se snaží (napříč všemi úlohami) dělit dílky především na desetiny či poloviny, na které jsou zvyklí z učebnic z úloh s desetinnými čísly. Žáci vyšších ročníků si osu dělí častěji jen po jednotkách (zápis čísel je tak méně přesný). Mnohem méně se vyskytuje dělení vhodné pro zlomky.

Ve všech úlohách (s výjimkou 1.) se objevilo u různých žáků propojení číselné osy s jednotkami délky. V některých případech je žák dopsal neodůvodněně k výsledku, jindy je používal pro měření vzdáleností čísel na číselné ose, což jen v některých případech poměrem aplikoval na další čísla. Někteří žáci použili centimetr opravdu jako míru odpovídající jednotce na číslené ose, na což jsem upozornila u typových úloh uvedených v učebnicích v oddíle 3.2. Nejvíce chyb (či postupů), které pravděpodobně vyplývají z typových úloh učebnic, se projevilo v 1. úloze a v menší míře také v dalších úlohách, které uvedu do závorky. Jsou to chyby, kdy žák předpokládá následnost v jím očekávané řadě čísel u pravidelných či nepravidelných rysek či u následné rysky, aniž by vnímal, na jaké pozici se nachází (2 a 3); nehledí na velikost dílků, tj. nepovažuje je za stejně velké či za stejně velké považuje různě velké dílky (2 a 3); vyznačuje nulu a priori uprostřed mezi vyznačeným kladným a záporným číslem nebo uprostřed bez ohledu na to, která čísla bude znázorňovat (4); jiné číslo než nulu považuje za počátek (3); zaměňuje uspořádání čísel při přechodu přes 0 (4); vyznačuje čísla tak, že číselná osa je symetrická buď podle jiného čísla než nula, nebo podle nuly, ale je kladná na obě strany, nebo porovnávání čísel probíhá v záporné části osy symetricky s kladnou (5 a 6).

Je možné, že zvyšování úspěšnosti řešení s rostoucím ročníkem pouze ve dvou úlohách (3a a 4), a mírný pokles či stagnace v 8. ročníku (oproti růstu z 6. do 7. ročníku) je způsobena vytrácením se číselné osy z učebnic v 8. a 9. ročníku. Tento jev by bylo však potřeba ověřit na větším výzkumném vzorku.

V 1. úloze a úloze 3a byli žáci ZŠ Zelená ve všech ročnících úspěšnější než žáci ZŠ Modrá. V úloze 3a nebyly rozdíly velké, ale v 1. úloze se mezi těmito školami ukázal rozdíl velký. Žáci ZŠ Zelená v ní byli mnohem úspěšnější, a to téměř dvojnásobně. S tímto typem úlohy se žáci obou škol s největší pravděpodobností neměli možnost setkat. Je tedy možné tento výsledek přisuzovat tomu, že žáci ze ZŠ Zelená jsou na základě analýzy učebnic více zvyklí na netypové úlohy na číselné ose a pravděpodobně nemají vytvořeny v takové míře předsudky o tom, jak se na číselné ose pracuje, tedy chybné algoritmy vzniklé mechanickou prací v typových úlohách. Je potřeba také říct, že u žáků 8. ročníku ZŠ Zelená už uplynula dlouhá doba od používání Hejného učebnic a že jejich chyby mohou být částečně způsobeny jinými materiály, s kterými se žáci během studia setkali.

Rozdíly, které by mohly vyplývat z používaných učebnic (především na 1. stupni), se tedy mezi školami ukázaly v 6. ročníku, v 1. úloze a ve schopnosti a ochotě žáků používat zlomky.

Z výše řečeného vyplývají i určitá didaktická doporučení. V rámci výzkumného šetření bylo zjištěno, že číselná osa není pro žáky nástrojem, který by uměli efektivně využívat. Zkušenosti žáků pouze s typovými úlohami učebnic se odrážejí v chybách přítomných v jejich řešeních úloh testu. Kromě toho žáci, kteří se s číselnou osou setkali v netypových úlohách (tzn. i úlohách obsahujících kombinaci zlomků a desetinných čísel), dosahovali často lepších výsledků.

Proto by bylo vhodné do výuky zařazovat netypové úlohy s číselnou osou (některé z nich je možné najít v oddílech 3.2.1 a 3.2.2). Učitelé by měli žáky vést k tomu, aby si číselnou osu dokázali konstruovat samostatně (Kreiner a kol., s. 196) a aby ji uměli využívat jako model, který pomáhá úspěšněji řešit úlohy (Shindo a Moriya, 2015, viz oddíl 2.3, Rendl, 2015).

Jak vyplynulo z analýzy učebnic, je číselná osa používána především pro demonstraci učiva, což, jak se ve výzkumu ukázalo, nestačí pro to, aby si ji žák osvojil jako model, který mu pomáhá a není na obtíž. Její osvojení by žákům nemělo dělat velké potíže, ale je potřeba ji do výuky více a ne pouze nárazově zařazovat. Měla by se také objevit i v 8. a 9. ročníku, kde se v současné době (v učebnicích) téměř nevyskytuje, což se negativně projevilo i ve výzkumném šetření. Učitel by se měl opakovaně vracet na úroveň modelů i u již odvozených vlastností a pravidel a posilovat tak spojení modelu a nějakého algoritmu. Číselná osa by měla být díky svým vlastnostem používána jako hlavní model číselných oborů a operací s nimi (vedle jiných modelů specifických pro daný číselný obor) a jako model, který může být zároveň využit pro vysvětlení mnohého dalšího učiva, a tím i k řešení mnohých úloh (Rendl, 2015, s. 252 a s. 246, Nováková a Vondrová, 2015, s. 8, viz také oddíl 1.2).

Žákům, kteří měli problém s chápáním velikosti jednotky (např. v souvislosti s mírou délky) či s vhodným členěním číselné osy, by mohla pomoci elektronická podoba číselné osy, kde by měli možnost si osu přiblížit a oddálit a posunout zobrazenou část. Pokud by žáci používali číselnou osu jako běžný nástroj, mohla by pro ně být přístupnější i dvojitá číselná osa popsaná v oddíle 1.2, a to vedle běžných postupů využívaných dosud v českém školství.

Domnívám se, že jsem cíle, které jsem si stanovila, v práci splnila. I když je vzorek žáků, s nimiž jsem pracovala, omezený, popsala jsem významné problémy, které žáci s číselnou osou mají, a upozornila jsem na nedostatečné zpracování tohoto tématu v učebnicích matematiky. Pokud je mi známo, v českém prostředí se číselné ose výzkumná pozornost příliš nevěnuje (viz oddíl 2.3), proto lze mou práci považovat za jisté východisko dalších výzkumů.

Osobně jsem ráda, že jsem pro svou diplomovou práci zvolila téma číselné osy. Pro mou učitelskou praxi je přínosná nejen proto, že jsem zjistila, pro která všechna témata se dá číselná osa využívat, ale protože jsem se utvrdila v tom, že má smysl jí ve výuce věnovat čas. Také jsem zjistila, na co si dávat pozor a co upřednostňovat při zadávání úloh pracujících s číselnou osou.

Literatura

CERMAT. *Matematika: základní úroveň obtížnosti: Didaktický test*. Praha: CZVV, 2010. [cit. 2016–09–22] Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2010-ilustracni.pdf

CERMAT. *Matematika: Didaktický test.* Praha: CZVV, 2013. [cit. 2016–09–22] Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2013-ilustracni.pdf

CERMAT. *Matematika: Didaktický test.* Praha: CZVV, 2014. [cit. 2016–09–23] Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2014-podzim.pdf

CERMAT. *Matematika: Didaktický test.* Praha: CZVV, 2015. [cit. 2016–09–22] Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-jaro.pdf

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. Zkoumání číselných představ dítěte a žáka. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 44(2), 1999, 148–167. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/140991/PokrokyMFA_44-1999-2_6.pdf

HEJNÝ, M. Záporná čísla. In: HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004, s. 327–342. ISBN 80-7290-189-3

HEJNÝ, M. Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky. In: HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004b, s. 43–61. ISBN 80-7290-189-3

HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

H-MAT. *Krokování a schody*. [online] H-mat, 2017. [cit. 2017–01–20] Dostupné z: http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/H-mat_Prostredi_krokovani_a_schody.pdf

HRUBČOVÁ, E. a kol. *Hravá matematika : Pracovní sešit pro 5. ročník ZŠ :2. díl.* Praha: TAKTIK International, 2013. ISBN 978-80-87881-05-7

IEA. *TIMSS 1999 Mathematics items: Released Set for Eighth Grade.* [online] Boston College: TIMSS and PIRLS, 1999. [cit. 2016–09–20] Dostupné z: http://timssandpirls.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf

IEA. *TIMSS: IEA's Third International Mathematics and Science Study.* [online] Boston College: TIMSS and PIRLS, 1999b. [cit. 2016–09–20] Dostupné z: http://timss.bc.edu/timss1995i/timsspdf/bmitems.pdf

IEA. Appendix B: Example Mathematics Items: Grade 4 and Grade 8. [online] Boston College: TIMSS and PIRLS, 2003. [cit. 2016–09–15] Dostupné z: http://timss.bc.edu/timss2003i/PDF/t03_af_app_b.pdf

IEA. *TIMSS 2011 User Guide for International Database*: *Released Items, Mathematics – Eighth Grade.* United States:TIMSS & PIRLS International Study Center and IEA, 2013. ISBN-13: 978-1-889938-13-4

KREINER, K., GOFREE, F., BERGER, P. Research in Mathematics Teacher Education III. From a Study of Teaching Practices to Issue in Teacher Education. In: *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*. 3, Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1999. ISBN 3-925386-52-1 Dostupné z: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme1/cerme1_proceedings_part3.pdf

NOVÁKOVÁ, E., VONDROVÁ, N. Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In: FUCHS, E., ZELENDOVÁ, E. *Matematika: Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání.*. Praha: NÚV, 2015, s. 8–41. ISBN 978-80-7481-140-1

PEETERS, D. Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education.* 31, 2016, 117–134 [cit. 2016–11–25] DOI 10.1007/s10212-015-0251-z

RENDL, M. Zlomky – obtíže žáků 2. stupně a jejich možné příčiny. In VONDROVÁ, N., RENDL, M. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Vydání první. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015, s. 181–252. ISBN 978-80-246-3234-6.

RVP ZV. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2016. [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf.

SAXE, G. B., DIAKOW, R., GEARHART, M. Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM.* 45(3), 2012, 343–364. [cit. 2016–05–22] doi:10.1007/s11858-012-0466-2

SHINDO, T., MORIYA, S. Number lines as an Instrument for Solving problems on Relative Values. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09.02. bis 13.02.2015 in Basel*. [cit. 2016–11–04] Dortmund: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 2015. Dostupné z: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34735/1/BzMU15_SHINDO_Number_Lines.pdf

SCHNEIDER, M., GRABNER, R. H., PAETSCH, J. Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: Their Interrelations in Grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology.* 101(2), 2009, 359–372 [cit. 2017–02–22] Dostupné z: https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/prof/PSY/PAE/Team/Schneider/SchneiderEtAl2009.pdf

VAMVAKOUSSI, X., VOSNIADOU, S. Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning.* 14(4), 2012, 265–284. [cit. 2016–05–23] doi:10.1080/10986065.2012.717378.

WATANABE, T. *Tape Diagrams and Double Number Lines: Visual Tool for Thinking*. [online] Kennesaw: Kennesaw State University, 2012. [cit. 2017–03–20] Dostupné z: http://ksuweb.kennesaw.edu/~twatanab/DeKalb%20Title%20I%20Summit%202012.pdf

Seznam příloh

Seznam obrázků

Přílohy

Příloha 1: Učebnice pro 5. ročník použité k analýze

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základní školy : 1. díl.* Brno: Studio 1 + 1, 2011. ISBN 978-80-86252-44-5

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základní školy : 2. díl.* Brno: Studio 1 + 1, 2011. ISBN 978-80-86252-45-2

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základní školy : 3. díl.* Brno: Studio 1 + 1, 2011. ISBN 978-80-86252-46-9

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Procvičovací sešit z matematiky pro 5. ročník základních škol. 1. díl.* Brno: Studio 1+1, 2011. ISBN 978-80-86252-47-6.

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Procvičovací sešit z matematiky pro 5. ročník základních škol. 2. díl.* Brno: Studio 1+1, 2011. ISBN 978-80-86252-48-3.

BLAŽKOVÁ, R. a POTŮČKOVÁ, J. *Procvičovací sešit z matematiky pro 5. ročník základních škol. 3. díl.* Brno: Studio 1+1, 2011. ISBN 978-80-86252-49-0.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J. a BOMEROVÁ, E. *Matematika 5 : učebnice pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J. a BOMEROVÁ, E. *Matematika 5 : Pracovní sešit 1 s přílohou Přehled učiva pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-967-4

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J. a BOMEROVÁ, E. *Matematika 5 : Pracovní sešit 2 pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-968-1

HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F. a DIVÍŠEK, J. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 5. ročník.* Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-192-5

HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F. a DIVÍŠEK, J. *Svět čísel a tvarů: matematika pro 5. ročník základní školy : pracovní sešit.* Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-198-7.

JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Všeň: Alter, 2014-. ISBN 978-80-7245-297-2

JUSTOVÁ, J. *Pracovní sešit k učebnici Matematika pro 5. ročník základních škol : 1. díl*. Všeň: Alter, 2013. ISBN 978-80-7245-194-4

JUSTOVÁ, J. *Pracovní sešit k učebnici Matematika pro 5. ročník základních škol : 2. díl*. Všeň: Alter, 2012. ISBN 978-80-7245-156-2

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace :5. ročník, 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2015. ISBN 978-80-7230-208-6

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace :5. ročník, 2. díl*. Olomouc : Prodos, 2013. ISBN 978-80-7230-209-3

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace :5. ročník, 3. díl*. Olomouc : Prodos, 2014. ISBN 978-80-7230-210-9

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky*. Olomouc: Prodos, 2010. ISBN 80-85806-68-1

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematické minutovky: 5. ročník : pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace dle RVP ZV. 1. díl.* 2. vyd. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos, 2015. ISBN 978-80-7230-211-6.

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematické minutovky: 5. ročník : pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace dle RVP ZV. 2. díl*. 2. vyd. Olomouc: Prodos, 2015. ISBN 978-80-7230-212-3.

PĚCHOUČKOVÁ, Š., KAŠPAROVÁ, M., RAKOUŠOVÁ, A. a KOZLOVÁ, M. *Matematika se Čtyřlístkem 5: učebnice pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-062-8

PĚCHOUČKOVÁ, Š., KAŠPAROVÁ, M., RAKOUŠOVÁ, A. a KOZLOVÁ, M. *Matematika se Čtyřlístkem 5: pracovní sešit 1 pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-063-5

PĚCHOUČKOVÁ, Š., KAŠPAROVÁ, M., RAKOUŠOVÁ, A. a KOZLOVÁ, M. *Matematika se Čtyřlístkem 5: pracovní sešit 2 pro 5. ročník základní školy s přílohou Přehled učiva.* Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-064-2

ROSECKÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základní školy : 1. díl (září – leden)*. Brno: Nová škola, 2014. ISBN 978-80-87565-68-1

ROSECKÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základní školy : 2. díl (únor – červen).* Brno : Nová škola, 2015. ISBN 978-80-87565-71-1

ROSECKÁ, Z. *Užitečné počítání : Pracovní sešit pro 5. ročník základní školy : 1. díl (září – leden).* Brno : Nová škola, 2014. ISBN 978-80-87565-66-7

ROSECKÁ, Z. *Užitečné počítání : Pracovní sešit pro 5. ročník základní školy : 2. díl (únor – červen).* Brno : Nová škola, 2015. ISBN 978-80-87565-72-8

Příloha 2: Učebnice pro 2. stupeň použité k analýze

BINTEROVÁ, H. *Matematika 6* (Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Geometrie a Aritmetika). Plzeň: Fraus, 2007.

BINTEROVÁ, H. *Matematika 7* (Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Geometrie a Aritmetika). Plzeň: Fraus, 2008.

BINTEROVÁ, H. *Matematika 8* (Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Geometrie a Aritmetika). Plzeň: Fraus, 2009.

BINTEROVÁ, H. *Matematika 9* (Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia: Geometrie a Aritmetika). Plzeň: Fraus, 2010.

COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika 6 : pro 6 ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 2007. ISBN: 978-80-7168-992-8

COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika 7 : pro 7 ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 2007. ISBN: 978-80-7168-993-5

COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika 8 : pro 8 ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 2007. ISBN: 978-80-7168-994-2

COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika 9 : pro 9 ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 2007. ISBN: 978-80-7168-995-9

HEJNÝ, M. a kol. *Matematika A : učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, o. p. s., 2015. ISBN 978-80-905756-1-5

HEJNÝ, M. a kol. *Matematika B : učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* Praha: H-mat, o. p. s., 2015. ISBN 978-80-905756-0-8

HERMANN, J. a kol. *Matematika. Prima* (Úvodní opakování; Dělitelnost; Kladná a záporná čísla). Praha : Prometheus, 2012 – 2014.

HERMANN, J. a kol. *Matematika. Sekunda* (Trojúhelníky a čtyřúhelníky; Hranoly; Výrazy I; Racionální čísla, procenta). Praha : Prometheus, 2012 – 2015.

HERMANN, J. a kol. *Matematika. Tercie* (Úměrnosti; Výrazy II; Geometrické konstrukce; Rovnice a nerovnice; Kruhy a válce). Praha : Prometheus, 2009 – 2014.

HERMANN, J. a kol. *Matematika. Kvarta* (Jehlany a kužely; Rovnice a jejich soustavy; Funkce; Podobnost a funkce úhlu). Praha : Prometheus, 2009 – 2014.

ODVÁRKO, O. a KADLEČEK, J. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* (1. – 3. díl) Praha : Prometheus, 2010 – 2011.

ODVÁRKO, O. a KADLEČEK, J. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. (1. – 3. díl) Praha : Prometheus, 2011 – 2012.

ODVÁRKO, O. a KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. (1. – 3. díl) Praha : Prometheus, 2012 – 2013.

ODVÁRKO, O. a KADLEČEK, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. (1. – 3. díl) Praha : Prometheus, 2013 – 2014.

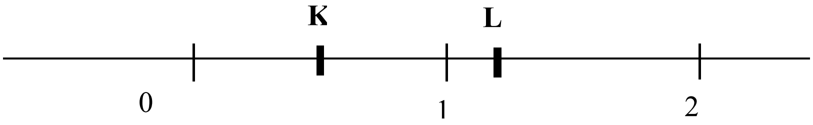
Příloha 3: Pilotní test

<u>Pilotní test pro 6. a 7. ročník</u>

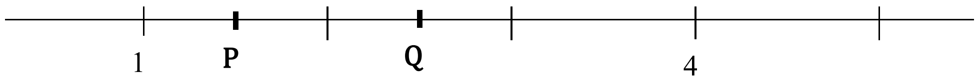
1) Zapiš číslo, kterému odpovídá vyznačený bod *X*. Naznač, jak jsi dospěl k výsledku.

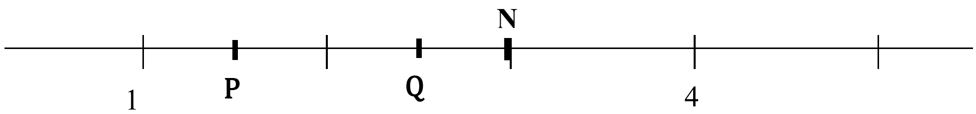
X=

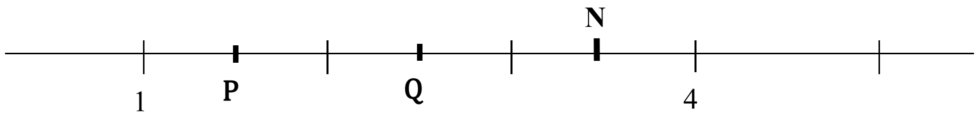
2) Kterému číslu nejlépe odpovídá vyznačené číslo *K* a *L*?

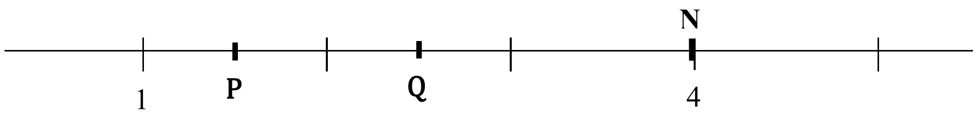


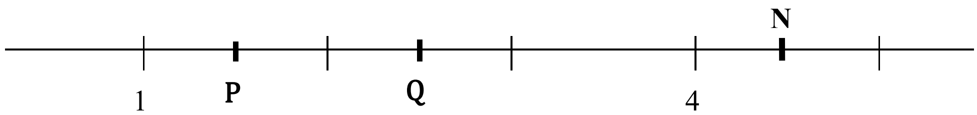
3) Které z následujících umístění čísla *N* na číselné ose je správné? *P*, *Q* jsou čísla. $N = P + Q$



a)


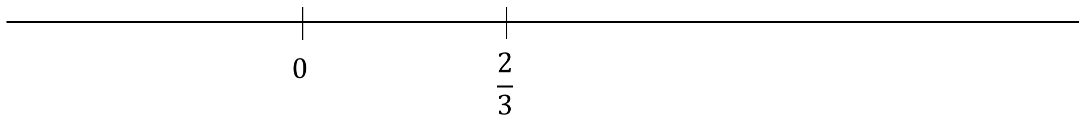
b)


c)


d)


4) Zaznamenej na číselné ose čísla: $\frac{2}{5}$; 0,2; $\frac{17}{4}$; 1,75. Vhodně zvol číselnou osu.

5) Vyznač na číselné ose obrazy čísel: 0,5; $\frac{3}{2}$



6) Porovnej čísla a všechna vyznač na číselné ose.

$\frac{1}{2}$ $\square$ 0,5

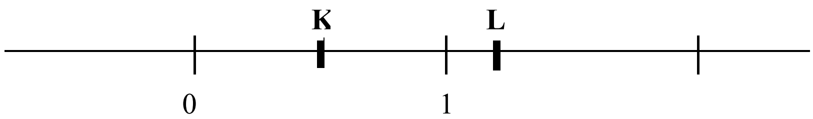
0,8 $\square$ $\frac{4}{3}$

Pilotní test pro 8. a 9. ročník

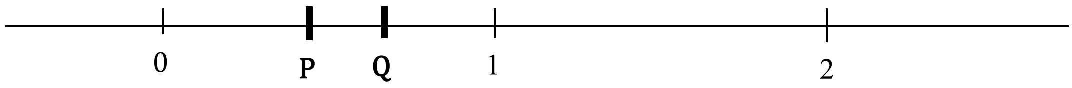
1) Zapište číslo, kterému odpovídá vyznačený bod *X*. Naznač, jak jsi dospěl k výsledku.

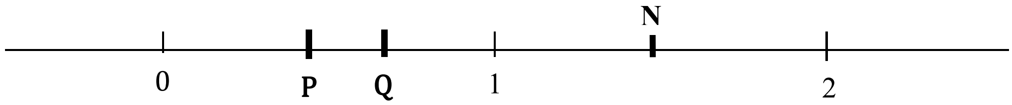
X=

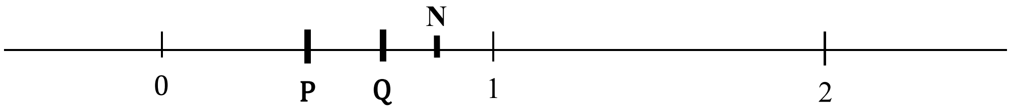
2) Kterému číslu nejlépe odpovídá vyznačené číslo *K* a *L*?

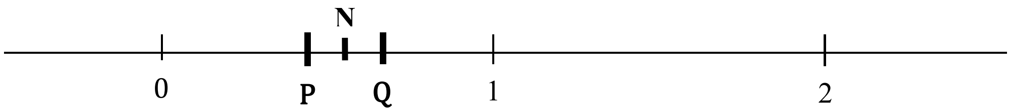


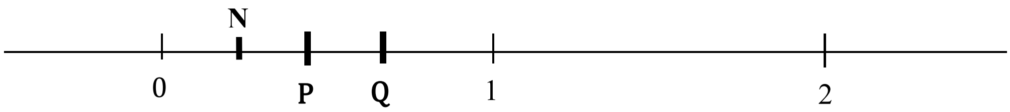
3) Které z následujících umístění čísla N na číselné ose je správné?
P a Q reprezentují dvě čísla. $N = P \cdot Q$



a)


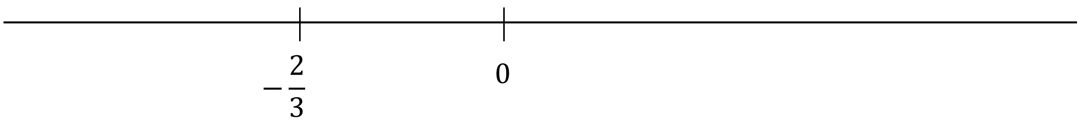
b)


c)


d)


4) Zaznamenej na číselné ose čísla: $-\frac{2}{5}$; $\frac{17}{4}$; $-0{,}2$; $1{,}75$. Vhodně zvol číselnou osu.

5) Vyznač na číselné ose obrazy čísel: $-0{,}5$; $-\frac{7}{6}$



6) Porovnej čísla a všechna vyznač na číselné ose.

$-\frac{2}{3}\ \square\ -0{,}6$

$0{,}75\ \square\ \frac{45}{60}$